Equações Diferenciais Parciais

- Modelagem: Escrever equações que descrevem um determinado fenomeno
- Derivar uma EDP: Ao modelar o fenomeno, a equação inclui uma função e as suas derivadas parciais

Conservação: $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = 0$ (com $\Delta t \to 0$ e $\Delta x \to 0$)

Suponhamos que $q(x,t) = \alpha u(x,t)$

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = \alpha \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$u_t + \alpha u_x = 0$$

→ Equação Diferencial Parcial !!!

OBJETIVO: Descobrir u_x e u_t

Definições

- $u = u(x, y, z, t)$ ↝ Função que depende de 4 variaveis independentes

$\frac{\partial u}{\partial x}$, u_x, $D_1 u$ ↝ Diferentes notações da derivada de u em relação a x.

$\frac{\partial u}{\partial y}$, u_y, $D_2 u$

$\frac{\partial u}{\partial z}$, u_z, $D_3 u$

$\frac{\partial u}{\partial t}$, u_t, $D_4 u$

↝ Notações para derivadas de 1° ordem

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, u_{xx}, $D_1^2 u$ // $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, u_{yy}, $D_2^2 u$ } Notação para 2° ordem

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, u_{yx}, $D_1 D_2 u$ 1° com relação a y

GENERALIZAÇÃO

$u: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

Equação Diferencial Parcial: É uma equação que envolve duas ou mais variáveis independentes $x, y, z, t, \dots$ e as derivadas parciais de uma função $u = u(x, y, z, t, \dots)$

- De maneira geral, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $u = u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \dots \frac{\partial^k u}{\partial x_{n_k}}\right) = 0$$

- Ordem de uma EDP: É dada pela derivada parcial de maior ordem que aparece na equação
  - $u_{xx} + u = 0 \rightarrow$ ORDEM 2
  - $u_{xyz} + (u_{xxxx})^2 = u \rightarrow$ ORDEM 4

- Linearidade de uma EDP: Uma EDP é linear se for de 1° grau em u e em todas as derivadas parciais que aparecem na equação

Exemplos
- $u^2 + 2u_x \cdot u_y = 1 \rightarrow$ Não linear
- $u_x + u_y + u_z = u \rightarrow$ Linear
- $\sqrt{u_{xx} + u_{yy}} = e^u \rightarrow$ Não linear
- $u_{xx} + u_{yy} = xy \rightarrow$ Linear

FORMULA GERAL DE UMA EDP DE 1° ORDEM

Linear

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x) \cdot D_j u + b(x) u + c(x) = 0 \quad \text{com } x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Exemplo: $u = u(x, y)$

↳ Formula geral

$$x u_x + (x^2 + y) u_y + (2x + y) u + xy = 0$$

★ Se $u = u(x, y)$:

$$\underbrace{A(x,y) u_x + B(x,y) u_y}_{\text{Parte Principal}} + C(x,y) u + D(x,y) = 0$$

FORMULA GERAL DE UMA EDP DE 2ª ORDEM

Linear

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u + c(x) u + d(x) = 0$$

Podem ser constantes ou então funções das variaveis independentes

Exemplo:

$$5u_{xx} + 2x u_{xy} + (x^2+y^2) u_{yy} + 2u_x + 3u_y + xyu + 1 = 0$$

números escolhidos por acaso

☆ Se $u = u(x,y)$:

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y)u_x + E(x,y)u_y + F(x,y)u + G(x,y) = 0$$

Parte Principal

Forma Geral de Uma EDP Linear (Ordem 1 ou 2)

Seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u + c(x) u + d(x) = 0$$

ORDEM 1

ORDEM 2

Reescrevendo

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u + c(x) u = f(x) \qquad u \geq (-d(x))$$

Operador $L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j + c(x)$

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e a_{ij}, b_j e c funções contínuas em Ω que assumem valores reais. L fica definido como

$$L: \underbrace{C^k(\Omega)}_{u: \Omega \to \mathbb{R}} \longrightarrow C(\Omega) \qquad u \longrightarrow Lu$$

Assim : $L \cdot u = f$ → Operador Diferencial Parcial

Por ser Linear: $L(\alpha u + \beta v) = \alpha L u + \beta L v$

Se $L \cdot u = 0$ ⇝ Equação Homogenea associada a $L \cdot u = f$

Se $u_1, u_2, \ldots, u_n$ são soluções de $L \cdot u = 0$ então $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ tambem é solução de $Lu = 0$ (principio da sobreposição)

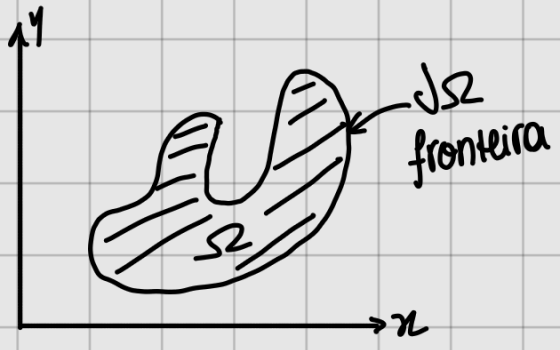
Condições de Contorno e Condições Iniciais

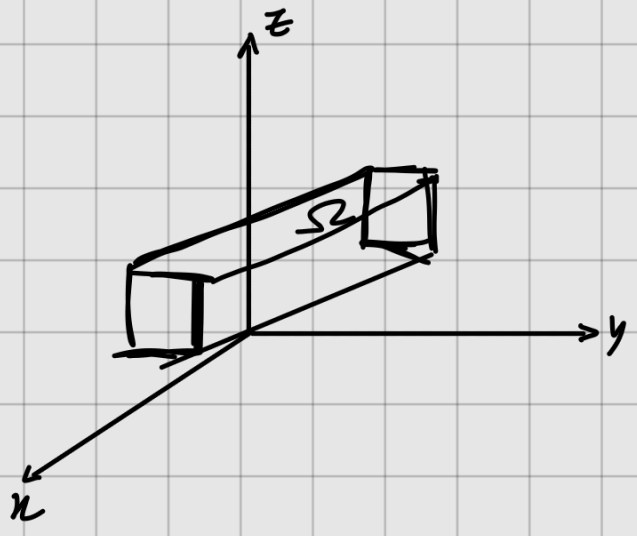
Forma Geral:

$$A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y)u_x + E(x,y)u_y + F(x,y)u + G(x,y) = 0$$

Tentamos Determinar $u(x,y)$

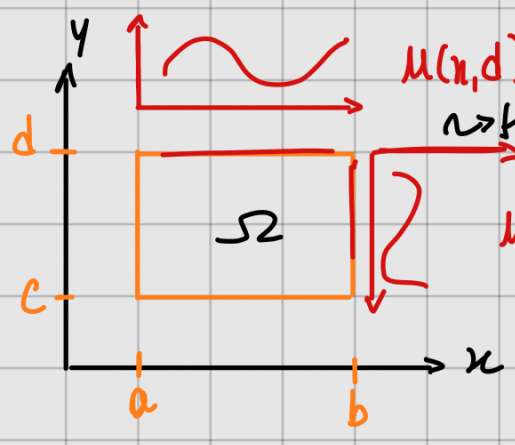
$u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u = u(x,y)$





Quando definimos condições sobre $u(x,y)$ e as suas derivadas parciais na fronteira da região Ω (ou seja em $\partial\Omega$), temos um problema de valores de contorno

Exemplo



$u(x,d) = f_1(x)$

⇝ funções temperatura nas bordas

$u(b,y) = g_1(y)$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = f(x) \text{ com } x \in \partial\Omega$$

α, β são constantes, f é uma função definida na fronteira $\partial\Omega$, $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ é a derivada direcional de u na direção normal a $\partial\Omega$

- Se $\beta = 0$; $\alpha u(x) = f(x)$, $x \in \partial\Omega$ → Condição de Dirichlet
- Se $\alpha = 0$; $\beta \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = f(x)$, $x \in \partial\Omega$ → Condição de Neumann

- Se estão presentes as informações $\alpha u(x) = f(x)$ e $\beta \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = g(x)$
  ↳ Condição mista

- Quando tentamos definir uma Condição Inicial associada a uma EDP
  - $n = 2$; $u(x,t)$; $u(x,0) = f(x)$ ↳ Curva inicial
    ↳ Dimensão
  - $n = 3$; $u(x,y,t)$; $u(x,y,0) = g(x,y)$ ⇝ superfície inicial

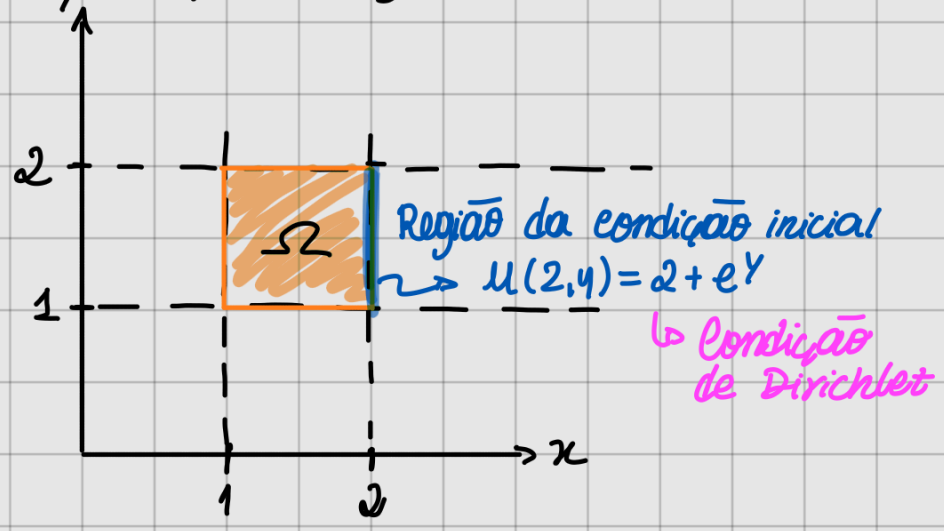
↳ Problema de cauchy ou de valor inicial

Exemplos

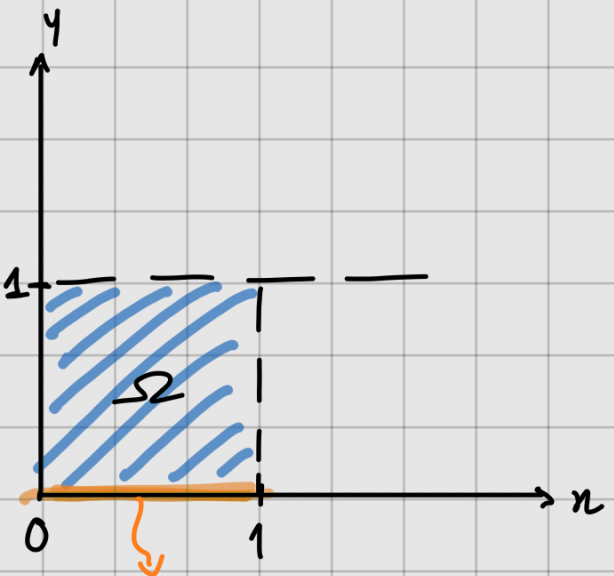
① $\begin{cases} u_x + e^{-y} u_y = 2 \\ u(2,y) = 2 + e^y \end{cases}$

$(x,y) \in [1,2] \times [1,2]$

Esboço da Região



② $\begin{cases} x u_x - \frac{x}{2y} u_y = u \\ u_x(x,0) = 2x \end{cases}$ $\quad (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$



③ $\begin{cases} x u_x + u_t = 0 \\ u(x,0) = x \end{cases}$ $\quad 0 \le x \le 1$, $t \ge 0$ ⇝ Problema dinâmico (depende do tempo)

↳ Problema de valor inicial / Problema de Cauchy

④ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ é um aberto limitado, $x = (x_1, x_2, x_3)$ e Δ é o operador Laplaciano

↳ Ω é parte de "dentro" de uma região $\overline{\Omega}$

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 \Delta u \text{ , em } \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,t) = 0 \text{ , } x \in \partial\Omega \text{ , } t \ge 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ , } x \in \overline{\Omega} \end{cases}$$

$u(x,t) = 0$ ⇝ Condição de Dirichlet

$u(x,0) = f(x)$ ⇝ Condição inicial

} Problema misto

⑤ $\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \text{ em } (0,L) \times (0,\infty) \\ u(0,t) = 0 = u(L,t), \ t \ge 0 \\ u(x,0) = f(x) \text{ , } x \in [0,L] \\ u_t(x,0) = g(x) \text{ , } x \in [0,L] \end{cases}$

$u(0,t) = 0 = u(L,t)$ ⇝ Condição de contorno / fronteira

$u(x,0) = f(x)$ ⇝ Condição inicial

} Problema misto

EDPs Elipticas, Parabolicas e Hiperbolicas

- EDP Linear de 2º Ordem

$$\underbrace{A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy}}_{\text{Parte principal}} + D(x,y)u_x + E(x,y)u_y + F(x,y)u + G(x,y) = 0$$

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \quad (*)$$

A equação $(*)$ em (x_0, y_0) é dita — Forma canonica

- Eliptica, se $B^2(x_0,y_0) - A(x_0,y_0)\cdot C(x_0,y_0) < 0$; $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$
- Parabolica, se $B^2(x_0,y_0) - A(x_0,y_0)\cdot C(x_0,y_0) = 0$; $u_{xx} = f(x, y, u, u_x, u_y)$
- Hiperbolica, se $B^2(x_0,y_0) - A(x_0,y_0)\cdot C(x_0,y_0) > 0$; $u_{xx} - u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$

Exemplo 1) A equação de Poisson $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$ é eliptica

Exemplo 2) A equação do Calor $u_t = u_{xx} + f(x,t)$ é parabolica

Exemplo 3) A equação da Onda $u_{tt} = u_{xx} + f(x,t)$ é hiperbolica

Exemplo 4) A equação de Triconi : $y u_{xx} + u_{yy} = 0$ é do tipo misto

↳ $B^2 - AC = -y$
- Ao longo de $y = 0$: Parabolica
- Ao longo de $y > 0$: Eliptica
- Para $y > 0$: Hiperbolica

EDPs de Simples Solução

Exercício 1: Encontre a solução de $\begin{cases} u_y(x,y) = e^y \cos(e^y - 1) \\ u(1,0) = x^2 \end{cases}$

$u = u(x,y)$

$\int u_y \, dy = \int e^y \cos(e^y - 1) \, dy$ → $\int e^y \cos(e^y - 1) \, dy$

(não esquecer)

↳ $\alpha = e^y - 1 \quad d\alpha = e^y dy$

$\int \cos\alpha \, d\alpha = \operatorname{sen}\alpha$

$= \operatorname{sen}(e^y - 1)$

i) $u(x,y) = \operatorname{sen}(e^y - 1) + f(x)$

↳ Forma geral

ii) $u(x,0) = x^2 = \operatorname{sen}(e^0 - 1) + f(x)$ ($e^0 - 1 = 0$)

$x^2 = f(x)$

Solução: $u(x,y) = \operatorname{sen}(e^y - 1) + x^2$

Exercício 2: Encontre a solução de $\begin{cases} u_x(x,y) = -\frac{1}{x} \\ u(1,y) = e^{\cos y} \end{cases}$ $x \neq 0$, $x > 0$

$u = u(x,y)$

i) $\int u_x \, dx = \int -\frac{1}{x} \, dx$

$u(x,y) = -\ln x + f(y)$ Solução geral

ii) $u(1,y) = e^{\cos y} = -\ln(1) + f(y)$

($\ln(1) = 0$)

$e^{\cos y} = f(y)$

Solução da EDP

$u(x,y) = -\ln(x) + e^{\cos y}$

Método das Características

Problema: Encontre $u = u(x,y)$ tal que $a u_x + b u_y = 0$, para $a, b \in \mathbb{R}$

↳ Equação homogenea, linear de 1° ordem

Relembrar

$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ $\quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$

$a u_x + b u_y = 0$

$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot (a,b) \cdot (u_x, u_y) = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

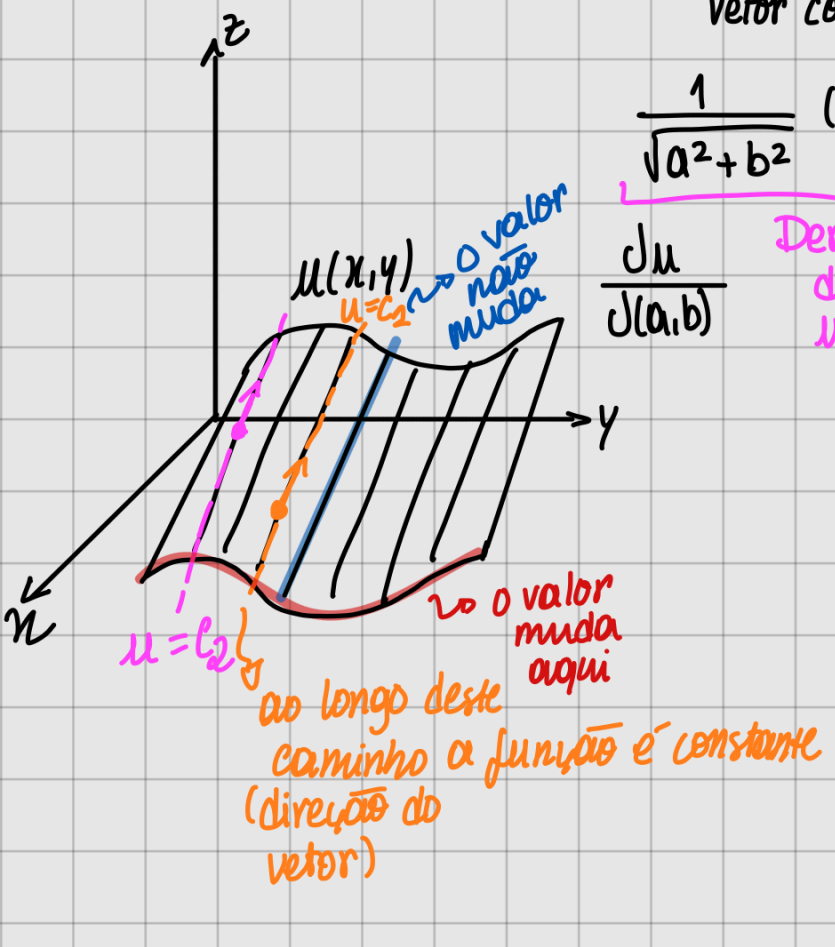
↳ Produto interno

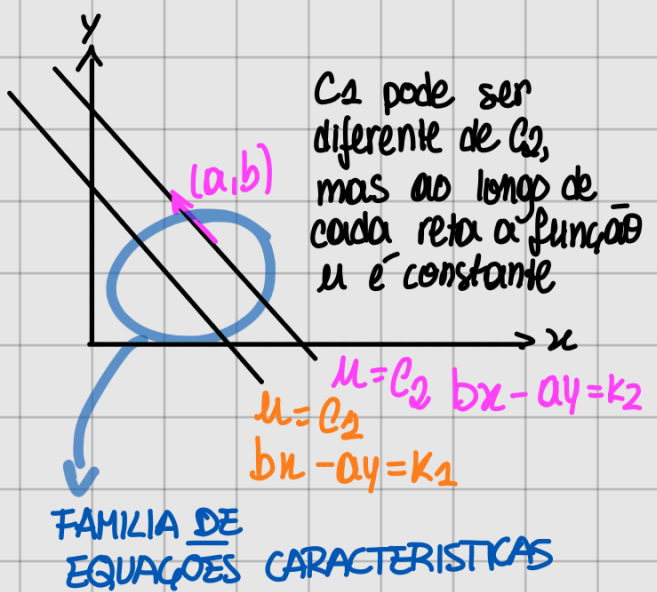
Vetor constante

$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (a,b) \cdot (u_x, u_y) = 0$

Derivada direcional da função u na direção do vetor (a,b)

$\frac{\partial u}{\partial (a,b)}$





- As características deste tipo de EDP são retas

$u = u(x,y)$

$$u(x,y) = f(bx - ay)$$

para k_1: $u(x,y) = f(k_1) = c_1$

para k_2: $u(x,y) = f(k_2) = c_2$

$u(x,y) = f(bx-ay)$ $\quad u_x(x,y) = f'(bx-ay) \cdot b$

$u_y(x,y) = -f'(bx-ay) \cdot a$

$$a \cdot u_x + b u_y = a \cdot (f'(bx-ay) \cdot b) - b \cdot (f'(bx-ay) \cdot a) = f'(bx-ay) \cdot (ab - ab) = 0 \#$$

OBS: $bx - ay = k$ soluções características de equações características de EDPs

$\Rightarrow x - \left(\frac{a}{b}\right)y = \frac{k}{b}$

(Reescrevendo

$x - cy = k \Rightarrow u(x,y) = f(x - cy)$ → maneira de apresentar a solução

Exemplo

1) Encontre a solução de: $\begin{cases} 2u_x + 3u_y = 0 \\ u(x,x) = e^{2x} \end{cases}$ (a, b) $\quad f(bx - ay)$

i) $u(x,y) = f(3x - 2y)$

ii) $u(x,x) = f(3x - 2x) = f(x) = e^{2x} \longrightarrow f(3x - 2y) = e^{2(3x-2y)} = e^{(6x-4y)}$

iii) $u(x,y) = e^{6x-4y}$

Ao longo da reta $3x - 2y = 5$

$u(x,y) = e^5$

2) Resolva $\begin{cases} u_x - 2u_y = 0 \\ u(x,4x) = \operatorname{sen}(2\omega x)e^{6x} \end{cases}$ (a, b)

$-2x - y = k$

$2x + y = -k$

$c = -k$

i) $u(x,y) = f(-2x - y)$

$u(x,y) = f(2x + y)$

ii) $u(x,4x) = f(2x + 4x) = f(6x) = \operatorname{sen}(2\omega x)e^{6x}$

$\alpha = 6x$

$\frac{\alpha}{6} = x$

$f(\alpha) = \operatorname{sen}\left(2\omega\frac{\alpha}{6}\right)e^{\alpha}$

$f(2x+y) = \operatorname{sen}\left(\omega \cdot \frac{2x+y}{3}\right)e^{2x+y}$

$$\boxed{u(x,y) = \operatorname{sen}\left(\omega \cdot \frac{2x+y}{3}\right)e^{2x+y}}$$

Método das Características

EDP Linear de 1º Ordem com Coeficientes variáveis. Caso homogeneo

Problema: Encontrar uma função $u = u(x,t)$ tal que

$$u_t(x,t) + c(x,t)u_x(x,t) = 0 \quad , \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

(c(x,t): função)

Definição: As curvas $x = x(t)$ que são soluções da EDO

$$x'(t) = c(x,t)$$

$\frac{du}{dt} = 0$ ao longo de $x'(t) = c(x,t)$ (u = constante ao longo de $x'(t) = c(x,t)$)

são chamadas as curvas características da EDP $u_t(x,t) + c(x,t)u_x(x,t) = 0$

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = \frac{du}{dt} + \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = u_t + x'(t)u_x = u_t + c(x,t)u_x = 0$$

Exemplo) Resolva $\begin{cases} u_t + \left(\frac{t}{x}\right)^2 u_x = 0 \\ u(x,0) = e^x \end{cases}$ $\qquad c(x,t) = \left(\frac{t}{x}\right)^2$

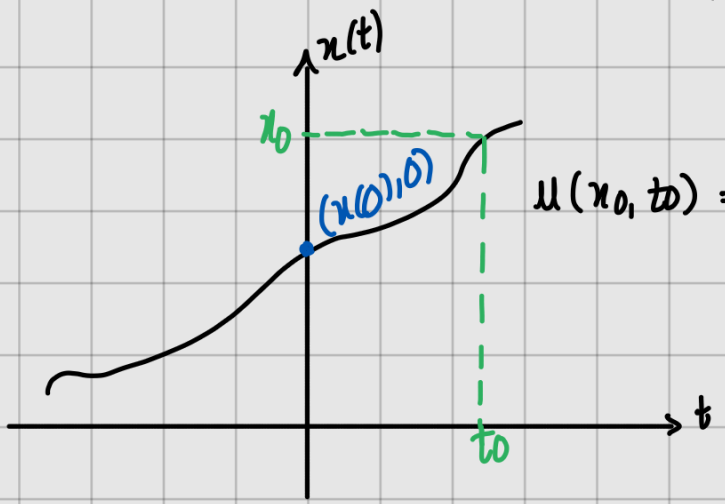
i) $\frac{dx}{dt} = \frac{t^2}{x^2}$ (EDO Separável)

$$x^2 dx = t^2 dt$$

$$\frac{x^3}{3} = \frac{t^3}{3} + \tilde{C}$$

$$x^3 = t^3 + C$$

$$x(t) = \sqrt[3]{t^3 + C}$$ ↝ Família de curvas



ii) Dado (x_0, t_0)

$$x(t_0) = x_0 = \sqrt[3]{t^3 + C}$$

$$C = x_0^3 - t_0^3$$

iii) $x(t) = \sqrt[3]{t^3 + (x_0^3 - t_0^3)}$

iv) $u(x,0) = e^x$, $x(t) = \sqrt[3]{t^3 + (x_0^3 - t_0^3)}$

$$x(0) = \sqrt[3]{x_0^3 - t_0^3}$$

$$u(x(0),0) = e^{x(0)} = e^{\sqrt[3]{x_0^3 - t_0^3}}$$

v) u é constante ao longo de características

$$x(t) = \sqrt[3]{t^3 + (x_0^3 - t_0^3)}$$

$$u(x(0),0) = e^{\sqrt[3]{x_0^3 - t_0^3}} = u(x_0, t_0)$$

$$u(x_0, t_0) = e^{\sqrt[3]{x^3 - t^3}}$$

Equação do Transporte - Método das Características

Caso n-Dimensional, homogeneo

Problema: Encontre $u = u(\vec{x}, t)$ que resolva:

$$u_t(\vec{x}, t) + \vec{c} \cdot \vec{\nabla} u(\vec{x}, t) = 0$$

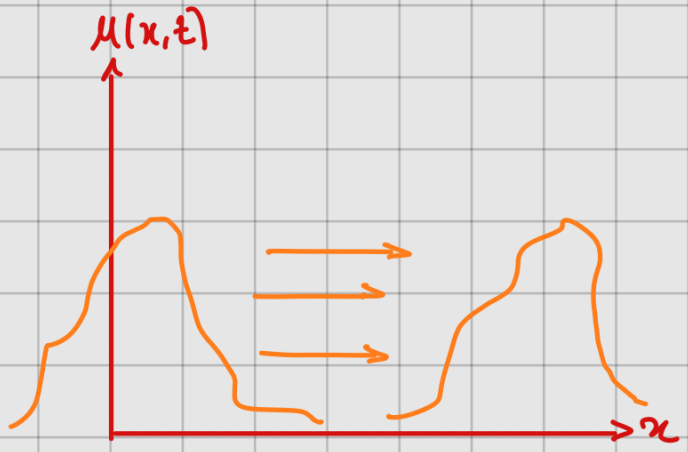
(produto interno)

$\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$

$\vec{\nabla} = (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n})$

em que $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{x_2}, \frac{\partial}{x_n}\right)$

↳ coordenadas espaciais



Exemplos

- $u_t + 2u_x + 5u_y = 0$
  $u = u(x, y, t)$
  $\vec{x} = (x, y)$
  $\vec{c} = (2, 5)$
- $u_t + 7u_x + 5u_y - 3u_z = 0$
  $u = u(x, y, z, t)$
  $\vec{x} = (x, y, z)$
  $\vec{c} = (7, 5, -3)$

OBS:

$u(x,y) = x^2 + y^2$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$u_t = 2 \cdot x(t) \cdot x'(t) + 2 \cdot y(t) \cdot y'(t)$$

$u(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$x_1 = x_1(t)$; $x_2 = x_2(t)$; ... ; $x_n = x_n(t)$

$u_t = u_{x_1} x_1'(t) + u_{x_2} x_2'(t) + \dots + u_{x_n} x_n'(t)$

- A solução geral da equação do transporte é:

$$u_t(\vec{x}, t) + \vec{c}\,\vec{\nabla} u(\vec{x}, t) = 0$$
$$u_t(\vec{x}, t) = f(\vec{x} - t\vec{c})$$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$u_t(\vec{x}, t) = \frac{d}{dt} f(\vec{x}, t\vec{c}) = \frac{df}{dx_1} x_1'(t) + \frac{df}{dx_2} \cdot x_2'(t) + \dots + \frac{df}{dx_n} \cdot x_n'(t)$$

$x_1(t) = x_1 - c_1 t$ $\quad x_2(t) = x_2 - c_2 t$ $\quad \dots$ $x_n(t) = x_n - c_n t$ $\quad \dots$ $x_n(t) = x_n - c_n t$

$x_1'(t) = -c_1$ $\quad x_2'(t) = -c_2$ $\quad \dots$ $x_n'(t) = -c_n$ $\quad \dots$ $x_n'(t) = -c_n$

$$u_t(\vec{x},t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \cdot (-c_1, -c_2, \ldots, -c_n)$$

Como $u(\vec{x},t) = f(\vec{x} - t\vec{c})$

$$u_t(\vec{x},t) = \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)}_{\nabla \cdot \vec{u}} \cdot \overbrace{(-c_1, -c_2, \ldots, c_n)}^{\vec{c}}$$

$$\boxed{u_t(\vec{x},t) = -\vec{c} \cdot \vec{\nabla} u}$$

Voltando à EDP: $u_t(\vec{x},t) + \vec{c} \cdot \vec{\nabla} u(\vec{x},t) = -\vec{c}\vec{\nabla}u + \vec{c}\vec{\nabla}u = 0$

Demonstração feita

Exercícios

1) Resolva $\begin{cases} u_t + 2u_x + 3u_y = 0 \\ u(x,y,0) = x^2 + y \end{cases}$

$u = u(x,y,t)$

i) $u_t + 2u_x + 3u_y = 0 \qquad \vec{c} = (2,3)$

$u_t + (2,3)(u_x, u_y) = 0$

ii) $u(x,y,t) = f(\vec{x} - t\vec{c}) = f\left((x,y) - t(2,3)\right)$

$= f(x - 2t, y - 3t)$

$u(x,y,t) = f(x - 2t, y - 3t)$

iii) $u(x,y,t) = f(x - 2t, y - 3t)$

$u(x,y,0) = f(x,y) = x^2 + y$

$f(x,y) = x^2 + y \Rightarrow f(x - 2t, y - 3t) = ((x - 2t)^2 + (y - 3t))$

SOLUÇÃO: $u(x,y,t) = (x - 2t)^2 + y - 3t$

Método das Características - EDP Linear 1° Ordem

Caso Não Homogeneo

Problema: Encontrar $u(x,y)$ que resolva a EDP $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y)$ ☆
com $(x,y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$; $a(x,y)$, $b(x,y)$ e $c(x,y) \in C^1(\Omega)$

Proposição: Se $u(x,y)$ resolve ☆, então ao longo das curvas características da EDP homogenea associada, $u(c(t)) = u(x(t), y(t))$ satisfaz

$$\frac{du}{dt}(x(t), y(t)) = c(x(t), y(t))$$

Demonstração

$$\frac{du(x(t),y(t))}{dt} = \frac{du}{dx}\cdot x'(t) + \frac{du}{dy}\, y'(t) = a(x(t),y(t))u_x + b(x(t),y(t))u_y = c(x(t),y(t))$$

Exemplo: Encontre a solução do problema de Cauchy $\begin{cases} 3u_x - 4u_y = x^2 \,, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u\left(s, \frac{3s}{4}\right) = \frac{s^3}{9} \,, s \in \mathbb{R} \end{cases}$

i) $x'(t) = 3 \longrightarrow x(t) = 3t + A \quad x(0) = A = s \longrightarrow x(t) = 3t + s$

$y'(t) = -4 \longrightarrow y(t) = -4t + B \quad y(0) = B = \frac{3s}{4} \longrightarrow y(t) = -4t + \frac{3s}{4}$

$$u(x(0), y(0)) = u\left(3\cdot 0 + s, -4\cdot 0 + \frac{3s}{4}\right) = u\left(s, \frac{3s}{4}\right) = \frac{s^3}{9}$$

ii) $\int \frac{du(x(t), y(t))}{dt}\, dt = \int c(x(t), y(t))\, dt \Rightarrow \int \frac{du(x(t), y(t))}{dt}\, dt = \int x^2(t)\, dt = \int (3t+s)^2\, dt$

Mais correto: $\int_0^t \frac{du(x(\tau), y(\tau))}{dt}\, d\tau = \int_0^t x^2(\tau)\, d\tau = \int_0^t (3\tau + s)^2\, d\tau$

$$= u(x(t), y(t)) - u(x(0), y(0)) = \frac{(3t+s)^3}{9} - \frac{s^3}{9}$$

$\frac{s^3}{9}$

$$= u(x(t), y(t)) = \frac{(3t+s)^3}{9} = u((x(t), y(t)) = \frac{x^3(t)}{9}$$

SOLUÇÃO

Separação de Variáveis

↳ Exemplo de equação que dá para resolver por este método

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ → Equação de LaPlace

$u_t = k u_{xx}$ → Equação da difusão / Calor

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$ → Equação da onda

Objetivo da separação de Variáveis

$u(x,t) = X(x)\,T(t)$

$X(x)$: Função só de x — $T(t)$: Função só de t

Exemplo

$u(x,t) = (x^2+2x)\,e^{-t^2/2}$

(x^2+2x) → $X(x)$ — $e^{-t^2/2}$ → $T(t)$

Solução Trivial: $u(x,t) = 0$ ↝ Resolve a EDP mas pode não ser adequada para as condições de contorno

Procedimentos

1. Supor $u(x,t) = X(x)\,T(t)$
2. Substituir $u(x,t) = X(x)T(t)$ na EDP e tentar obter EDOs nas variáveis x e t.
3. Verificar se as EDOs são mais faceis que a EDP.
4. Resolver as EDOs, obtendo $X(x)$ e $T(t)$
5. Fazer $u(x,t) = X(t)T(t)$ (Pode não ter exatamente este aspeto)
6. $u(x,t) = \sum_k u_k(x,t)$ → Quando obtemos uma solução que devia ser escrita por Serie de Fourier

Exemplo: Encontre a solução geral $u(x,y)$ da EDP $\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} = 2(x+y)u$

OBS: A EDP é linear

↳ Sejam $w_1(x,y)$ e $w_2(x,y)$ soluções da EDP e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\frac{dw_1}{dx} = w_{1x}$ $\quad$ $\frac{dw_1}{dy} = w_{2y}$

* w_1 é solução da EDP

$w_{1x} + w_{1y} = 2(x+y)w_1$

* w_2 é solução da EDP

$w_{2x} + w_{2y} = 2(x+y)w_2$

- Será que $\alpha w_1 + \beta w_2$ é solução da EDP?

$u = \alpha w_1 + \beta w_2$

$$\frac{d}{dx}(\alpha w_1 + \beta w_2) + \frac{d}{dy}(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha w_{1x} + \beta w_{2x} + \alpha w_{1y} + \beta w_{2y}$$
$$= \alpha(w_{1x} + w_{1y}) + \beta(w_{2x} + w_{2y})$$
$$= \alpha(2(x+y)w_1) + \beta(2(x+y)w_2)$$
$$= 2(x+y)(\alpha w_1 + \beta w_2)$$

conclusão: $\frac{d(\alpha w_1 + \beta w_2)}{dx} + \frac{d(\alpha w_1 + \beta w_2)}{dy} = 2(x+y)(\alpha w_1 + \beta w_2)$

A soma de soluções é tambem uma solução

Resolução da EDP (Método das variaveis)

1) $u(x,y) = X(x)Y(y)$

$$\frac{du(x,y)}{dx} = \frac{d}{dx}(X(x)Y(y)) \quad \text{(funciona como constante)}$$
$$= \frac{d}{dx}(X(x)) \cdot Y(y) = X'(x)Y(y)$$

$$\frac{du(x,y)}{dy} = \frac{d}{dy}(X(x)Y(y)) \quad \text{(funciona como constante)}$$
$$= X(x)\frac{d}{dy}(Y(y)) = X(x)Y'(y)$$

2)

$$u(x,y) = X(x)Y(y), \quad \frac{du}{dx}(x,y) = X'(x)Y(y), \quad \frac{du}{dy}(x,y) = X(x)Y'(y)$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} = 2(x+y)u$$

$$X'(x)Y(y) + X(x)Y'(y) = 2(x+y)X(x)Y(y)$$

$$\frac{X'(x)Y(y)}{X(x)Y(y)} + \frac{X(x)Y'(y)}{X(x)Y(y)} = \frac{2(x+y)X(x)Y(y)}{X(x)Y(y)}$$

$u(x,y) = X(x)Y(y)$

$u(x,y) = 0$ ~ Solução Possivel

Se $u(x,y) \neq 0$ posso fazer

$$\frac{X'(x)}{X(x)} + \frac{Y'(y)}{Y(y)} = 2x + 2y \iff \underbrace{\frac{X'(x)}{X(x)} - 2x}_{\text{função só de } x} = \underbrace{\frac{-Y'(y)}{Y(y)} + 2y}_{\text{função só de } y} = K$$

(é unica forma de serem iguais é se forem uma constante)

3)

1° EDO: $\frac{X'(x)}{X(x)} - 2x = k$

2° EDO: $-\frac{Y'(y)}{Y(y)} + 2y = k$

4) Resolver as EDOs

- $\int \frac{1}{X(x)} \cdot X'(x)\,dx = \int 2x + k\,dx \iff \ln|X(x)| = x^2 + kx + c_1$

$X(x) = e^{x^2+kx+c_1} = e^{x^2+kx} \cdot e^{c_1}$ (→ $= C$)

$X(x) = Ce^{x^2+kx}$

- $\int \frac{1}{Y(y)} \cdot Y'(y)\,dy = \int 2y - k\,dy \iff \ln|Y(y)| = y^2 - ky - b_1$

$Y(y) = e^{y^2-ky} \cdot e^{b_1}$ (→ constante $= B$)

$Y(y) = Be^{y^2-ky}$

$u(x,y) = X(x)Y(y)$

$u(x,y) = (Ce^{x^2+kx})(Be^{y^2-ky})$

$u(x,y) = Ae^{x^2+y^2+k(x-y)}$

produto de duas constantes é uma constante

$C \cdot B = A$

Solução Geral Via Linearidade

Exemplo: $u_x + u_y = 2(x+y)u$

Solução: $u(x,y) = Ae^{x^2+y^2+k(x-y)}$ → Não é uma solução muito geral

$u(x,y) = 5e^{x^2+y^2+3(x-y)}$ é solução da EDP

$u(x,y) = -4\sqrt{3}e^{x^2+y^2-\pi(x-y)}$ é solução da EDP

$w = 5e^{x^2+y^2+3(x-y)} - 4\sqrt{3}e^{x^2+y^2-\pi(x-y)}$ → também é solução da EDP

$u(x,y) = Ae^{x^2+y^2+k(x-y)}$

$u_k(x,y) = A_k e^{x^2+y^2+k(x-y)}$

$u(x,y) = \sum_k u_k(x,y)$ → LINEARIDADE (não só uma solução mas sim todo o conjunto delas é válido)

$u(x,y) = \sum_k A_k e^{x^2+y^2+k(x-y)}$

$u_1(x,y) = A_1 e^{x^2+y^2+k_1(x-y)}$ $\quad u_2(x,y) = A_2 e^{x^2+y^2+k_2(x-y)}$

Verificação se $w(x,y) = u_1 + u_2$ é solução

$$w(x,y) = u_1 + u_2 = A_1 e^{x^2+y^2+k_1(x-y)} + A_2 e^{x^2+y^2+k_2(x-y)}$$

$$w_x = A_1(2x+k_1)e^{x^2+y^2+k_1(x-y)} + A_2(2x+k_2)e^{x^2+y^2+k_2(x-y)}$$

$$w_y = A_1(2y-k_1)e^{x^2+y^2+k_1(x-y)} + A_2(2y-k_2)e^{x^2+y^2+k_2(x-y)}$$

$$w_x + w_y = A_1(2x+k_1+2y-k_1)e^{x^2+y^2+k_1(x-y)} + A_2(2x+k_2+2y-k_2)e^{x^2+y^2+k_2(x-y)}$$

$$w_x + w_y = A_1 2(x+y)e^{x^2+y^2+k_1(x-y)} + A_2 2(x+y)e^{x^2+y^2+k_2(x-y)}$$

$$w_x + w_y = 2(x+y)\left(A_1 e^{x^2+y^2+k_1(x-y)} + A e^{x^2+y^2+k_2(x-y)}\right)$$

$$\boxed{w_x + w_y = 2(x+y)w}, \quad w = u_1 + u_2$$

↳ É solução e é linear

Equação do Calor (ou Difusão) - Intuição e Conceitos Iniciais

Operador: $\vec{\nabla} = \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}\right)$

Gradiente de um campo escalar $f(x,y,z)$

$$\vec{\nabla} \cdot f = \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}\right) \cdot f = \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{dz}{dy}\right)$$

Laplaciano de um campo escalar $f(x,y,z)$:

$$\vec{\nabla}^2 \cdot f = \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}\right) \cdot \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}\right) \cdot f = \left(\frac{d^2f}{dx} + \frac{d^2f}{dy} + \frac{d^2f}{dz}\right)$$

Divergente de um campo vetorial $\vec{F} = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)\right) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Teorema da Divergência (ou de Gauss): Relaciona o fluxo de um campo vetorial através de uma superfície fechada ∂W com o comportamento desse campo vetorial no interior da região W. Então se F é um campo vetorial contínuo e diferenciável, W é uma região do espaço e ∂W é a superfície fechada que compõe a fronteira de W

$$\iint_{\partial W} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iiint_{W} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dV = \iiint_{W} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dV$$

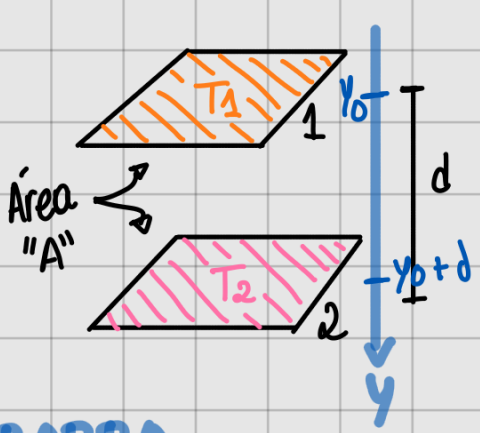
- **Exemplo**

$\vec{F} = (xz, yz, xyz)$

$\vec{\nabla} F = z + z + xy$

$\vec{\nabla} \vec{F} = 2z + xy$

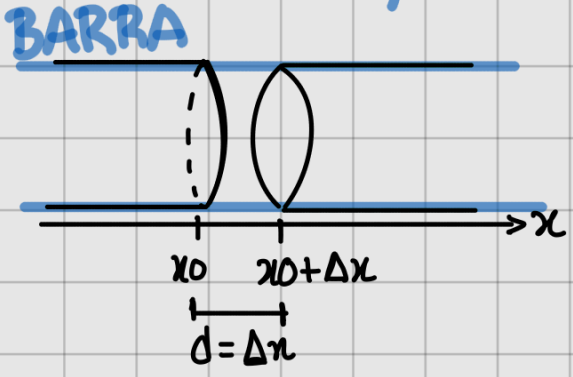
Lei de Fourier do Arrefecimento

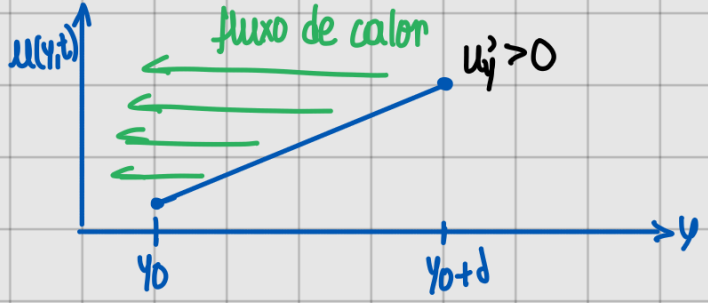


Se $T_2 > T_1$ o fluxo de calor ocorre da placa mais quente para a mais fria

$$\underset{\text{(fluxo)}}{\phi} = \frac{-K \cdot A(T_2 - T_1)}{d} = \frac{-K \cdot A \cdot (u(x_0 + \Delta x, t) - u(x_0, t))}{\Delta x}$$

(K: condutividade térmica, (J/msK°))





$$\phi \Rightarrow \frac{J}{msK^\circ} \cdot \frac{m^2}{m} \cdot K \Rightarrow J/s$$

(fluxo de energia por segundo)

$$q(x_0,t) = \frac{\Phi}{A} = \frac{-k\cdot(u(x_0+\Delta x_0,t) - u(x_0,t))}{\Delta x} \qquad q(x_0,t) \Rightarrow \frac{W}{m^2}$$

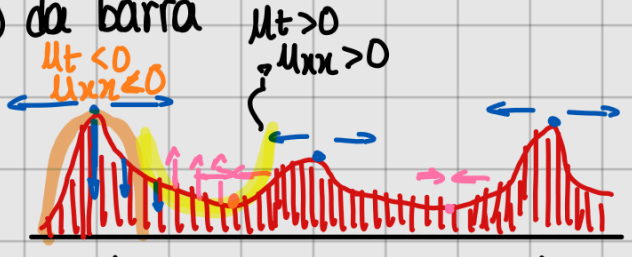
* O objetivo é perceber o fluxo de calor entre as duas secções da mesma barra
Supomos que não existe diferença entre o fluxo da ponta da barra e o interior
↳ Problema Unidimensional

$$q(x_0,t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-k(u(x_0+\Delta x,t) - u(x_0,t))}{\Delta x}$$

$$q(x_0,t) = -k\frac{du}{dx}$$

$$\boxed{q(x_0,t) = -k\,u_x}$$

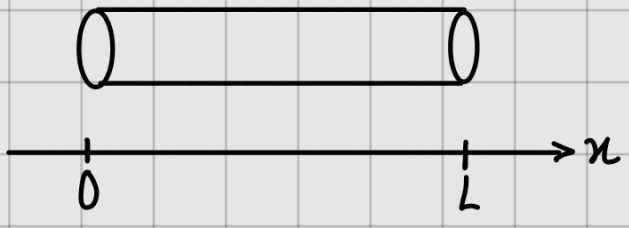
↳ Perfil de temperatura ao longo da barra



↳ Variação da temperatura

Temperatura diminui $u_t < 0$

Temperatura aumenta $u_t > 0$



▷ $\boxed{u_t = \alpha\, u_{xx}}$

Equação do Calor (ou Difusão): Obter a EDP

Simplificações

1) Material homogeneo. Propriedades físicas constantes

σ = calor especifico : $\frac{J}{kg\cdot K}$ ρ: Densidade : $\frac{kg}{m^3}$ k : Condutividade Térmica : $\frac{J}{s\cdot k\cdot m}$

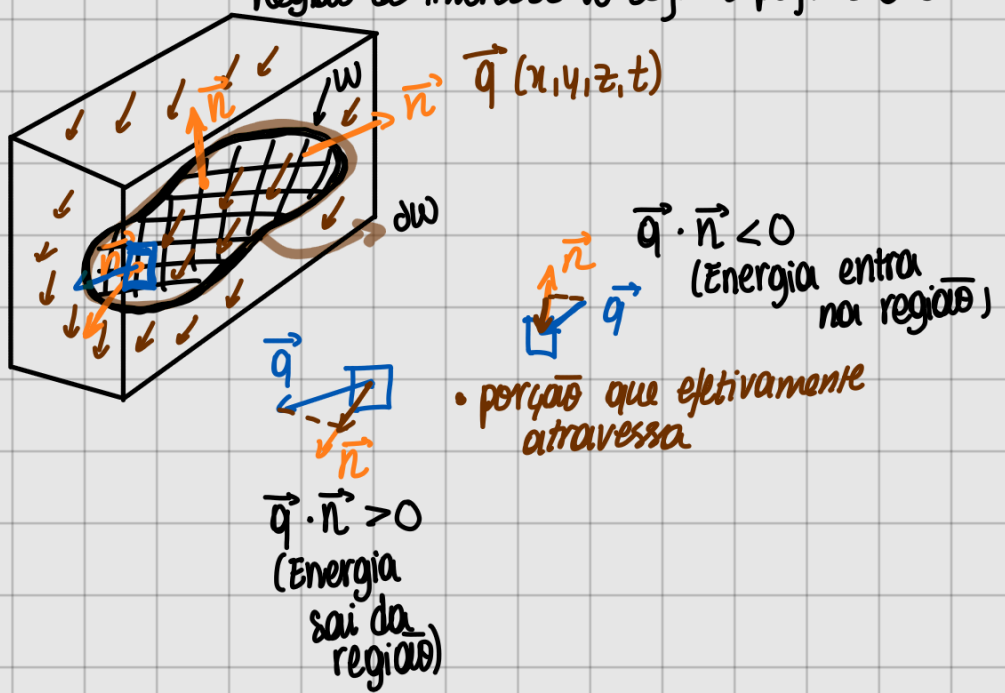
2) Nenhum calor é produzido ou destruido dentro do corpo

3) O fluxo de calor é proporcional ao gradiente da temperatura

$$\vec{q}(x,y,z,t) = -k\vec{\nabla}u$$

Objetivo: Obter a distribuição de temperatura $u(x,y,z,t)$ no corpo w.

Região de interesse w cuja superfície é dw



$$\phi = \iint_{dw} \vec{q}(x,y,z,t)\cdot\vec{n}\,ds = \iint_{dw} -k\vec{\nabla}u\cdot ds = \iiint_{w} -k\cdot\vec{\nabla}(\vec{\nabla}u)\,dV$$

$$= \iiint_{w} -k\cdot\left[\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dy^2}+\frac{du^2}{dz^2}\right]dV$$

- Qual o total de energia armazenada em w?

$$Q = \iiint_{w} \sigma\cdot\rho\cdot u(x,y,z,t)\,dV$$

- Qual a taxa de decrescimo de calor em w? (Calor a sair por unidade de tempo)

$$-\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\iiint_{w}\sigma\rho u\,dV = \iiint_{w} -\sigma\rho\frac{du}{dt}\,dV$$

- A unica maneira de w perder energia é se houver fluxo de calor através de dw

$$\iiint_{w} -\sigma\rho u_t\,dV = \iiint_{w} -k\underbrace{\left[\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right]}_{\nabla^2 u}dV$$

$$\sigma\rho u_t = k\nabla^2 u$$

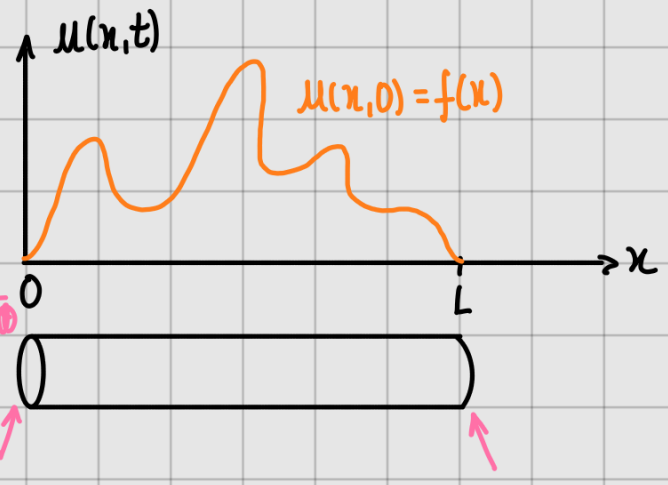
$$u_t = \alpha\nabla^2 u \quad (\text{em } 3D)$$

$$\boxed{u_t = \alpha u_{xx}}$$

Equação de calor em 1 dimensão

Equação do Calor - Condições de Contorno de Dirichlet (EDP Homogenea)

Resolva: $\begin{cases} u_t = k u_{xx} & (I) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & (II) \\ u(x,0) = f(x) & (III) \end{cases}$



Distribuição de temperatura no instante inicial (condição inicial)

informação sobre os extremos da barra

Método da separação de variáveis

i) $u(x,t) = X(x)T(t)$ $\quad u_t = k u_{xx}$

$(u(x,t)) = (X(x)T(t) \neq 0)$ $\quad \frac{\partial}{\partial t}(X(x)T(t)) = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}(X(x)T(t))$

$$\frac{X(x)T'(t)}{X(x)T(t)} = \frac{k X''(x) T(t)}{X(x)T(t)}$$

$$\frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \sigma \text{ (constantes)}$$

$$\frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)} = \sigma \quad e \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \sigma$$

$$T'(t) - k\sigma T(t) = 0 \quad e \quad X''(x) - \sigma X(x) = 0$$

ii) $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ $\qquad X(0) = 0 \;;\; X(L) = 0$

- $\sigma = 0$: $X''(x) = 0 \rightarrow X'(x) = C_1 \rightarrow X(x) = C_1 x + C_2$

Conclusão $X(x) = 0$ $\quad \sigma = 0$ não serve $\quad u(x,t) = X(x)\cdot T(t) = 0$

$X(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$X(L) = C_1 \cdot L = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

• $\sigma > 0$: $\sigma = \lambda^2$ $\quad X''(x) + 0X'(x) - \lambda^2 X(x) = 0$

$r^2 - \lambda^2 = 0$

$r^2 = \lambda^2 \rightarrow r = \lambda \ \vee \ r = -\lambda$

Aplicar condições

$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$

$X(0) = c_1 e^{\lambda \cdot 0} + c_2 e^{-\lambda \cdot 0} = c_1 + c_2 = 0 \rightarrow c_2 = -c_1$

$X(L) = c_1 e^{\lambda L} - c_1 e^{-\lambda L} = c_1 (e^{\lambda L} - e^{-\lambda L}) \cdot \frac{e^{\lambda L}}{e^{\lambda L}} = \frac{c_1 (e^{2\lambda L} - 1)}{e^{\lambda L}} = 0 \ e^{\lambda L}$

$X(x) = 0 \cdot e^{\lambda x} - 0 \cdot e^{\lambda x} \Rightarrow X(x) = 0$ não serve

$c_1 (e^{2\lambda L} - 1) = 0$

0 " (não valido)

• $\sigma < 0$: $\sigma = -\lambda^2$ $\quad X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$

$r^2 + \lambda^2 = 0$

$r^2 = -\lambda^2 \quad r = \lambda i \ \vee \ r = -\lambda i$

$r_1 = a + bi$

$r_2 = a - bi$

$X(x) = e^{ax} (c_1 \cos(bx) + c_2 \operatorname{sen}(bx))$

Aplicar condições

$X(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \operatorname{sen}(\lambda x)$

$X(0) = c_1 \overbrace{\cos(\lambda \cdot 0)}^{1} + c_2 \overbrace{\operatorname{sen}(\lambda \cdot 0)}^{0} = c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$X(L) = c_2 \operatorname{sen}(\lambda L) = 0$

$\lambda L = n\pi$

$\lambda = \frac{n\pi}{L}$

$\sigma = -\lambda^2 = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}$

$$\boxed{X(x) = C \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

iii) $T'(t) - k\sigma T(t) = 0 \qquad \sigma = -\lambda^2 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$

$T'(t) + \frac{n^2 k^2 k}{L^2} T(t) = 0$

$T(t) = Be^{-\frac{k n^2 \pi^2}{L^2} t}$

iv) $u(x,t) = X(t)T(t)$

$X(x)T(t) = be^{\frac{-kn^2\pi^2}{L^2}t}\,sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

$= b_n e^{\frac{-kn^2\pi^2}{L^2}t}\,sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

Por exemplo para $n=3$

$be^{\frac{-k9\pi}{L^2}t}\,sen\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$ b pode tomar qualquer valor

Como a soma de soluções lineares também é linear

$$S = b_1 e^{\frac{-k\pi^2}{L}t}\,sen\left(\frac{\pi x}{L}\right) + b_2 e^{\frac{-k4\pi^2}{L}}\,sen\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

v) $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\frac{-kn^2\pi^2}{L^2}t}\,sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

FORMULA GERAL DO EDP DO CALOR com condições de Dirichlet

- Qualquer b_n é válido no caso geral com condições de contorno mas não com condições iniciais

vi) Aplicar a condição inicial

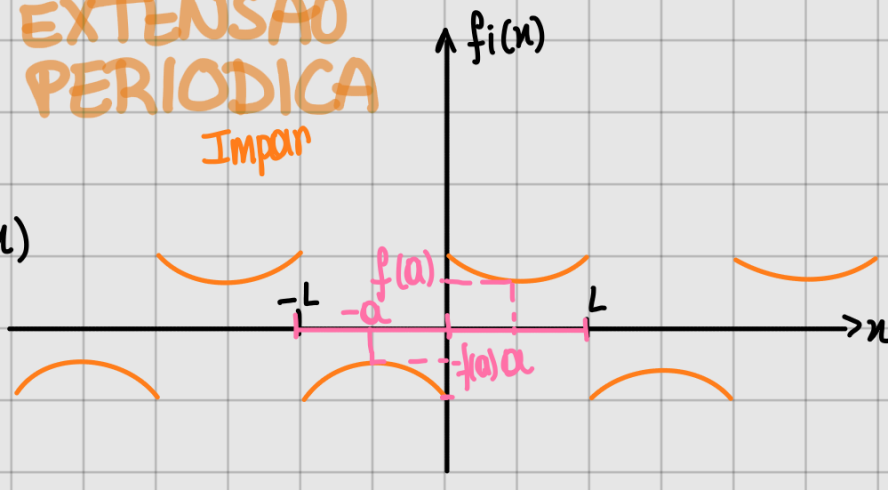
$u(x,0) = f(x)$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$$

impar

EXTENSÃO PERIODICA

Impar



$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,sen(n\omega x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = fi(x)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} fi(x)\,sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{1}{L}\left(\int_{-L}^{0} fi(x)\,sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \int_{0}^{L} fi(x)\,sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right)$$

$$= \frac{1}{L}\left(\int_{0}^{L} fi(x)\,sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx - \int_{0}^{-L} fi(x)\,sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right) = \frac{1}{L}\left(\int_{0}^{L} fi(x)\,sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \int_{0}^{L} fi(x)\,sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right)$$

Mudança de variável

$k = -x \quad x \in [0,-L]$

$-dk = dx,\ k = -x \in [0,L]$

$$-\int_{0}^{L} fi(x)\,sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} fi(x)\,sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$x \in [0,L] \rightarrow fi(x) = f(x)$

$$= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\frac{-kn^2\pi^2}{L^2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Equação de Calor com Condições de Neumann

Resolva $\begin{cases} u_t = k u_{xx} \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$

i) $u(x,t) = X(x)T(t)$

$u_t = k u_{xx}$

$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t)$

$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)} = \sigma$ (constante)

$X''(x) - \sigma X(x) = 0$ e $T'(t) - k\sigma T(t) = 0$

ii) $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ $\quad u_x(0,t) = X'(0)T(t) = 0 \rightarrow X'(0) = 0$

$u_x(L,t) = X'(L)T(t) = 0 \rightarrow X'(L) = 0$

- $\sigma = 0$: Solução trivial

$X''(x) = 0 \rightarrow X'(x) = C_1 \quad X(x) = C_1 x + C_2$ Uma possibilidade: $X(x) = d$ (constante)

$X'(0) = C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0$

$X'(L) = C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0$

- $\sigma > 0$; $\sigma = \lambda^2$, $\lambda > 0$

$X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$

$r^2 - \lambda^2 = 0 \rightarrow r = \lambda$ ou $r = -\lambda$

$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} = C(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x})$

$X'(x) = C_1\lambda e^{\lambda x} + C_2\lambda e^{-\lambda x} = C\lambda(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x})$

$X'(0) = C_1\lambda e^0 + C_2\lambda e^0 = C_1\lambda + C_2\lambda = \lambda(C_1 + C_2) = 0 \rightarrow C_1 + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = -C_1 = -C$

$\lambda \neq 0$

$X'(L) = C\lambda(e^{\lambda L} - e^{-\lambda L}) = 0 \rightarrow \frac{C(\lambda^{\lambda L} - e^{-\lambda L})}{e^{\lambda L}} = 0 \rightarrow \frac{C(e^{2\lambda L} - 1)}{e^{\lambda L}} = 0$ $\quad e^{\lambda L}$

$C(e^{2\lambda L} - 1) = 0 \rightarrow C = 0$

$X(x) = 0$. Solução trivial $u(x,t) = X(x)T(t) = 0 \cdot T(t) = 0$. Não interessa

• $\sigma<0$: $\sigma = -\lambda^2$, $\lambda>0$

$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$

$r^2 + \lambda^2 = 0 \quad r = \lambda i \ \text{V} \ r = -\lambda i$

$X(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \operatorname{sen}(\lambda x)$

$X(x) = C\cos(\lambda x)$

$X'(x) = -C_1\lambda \operatorname{sen}(\lambda x) + C_2\lambda\cos(\lambda x)$

$X'(x) = C\lambda \operatorname{sen}(\lambda x)$

$X'(0) = -C_1\lambda \operatorname{sen}(0) + C_2\lambda\cos(0) = C_2\lambda = 0 \rightarrow C_2 = 0$

$X'(L) = C\lambda \operatorname{sen}(\lambda L) = 0 \qquad \lambda L = n\pi \qquad \lambda = \frac{n\pi}{L} \qquad \sigma = -\lambda^2 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$

Temos duas hipoteses : $X(x) = d$

$$X(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

iii) $T'(t) - \sigma x T(t) = 0 \qquad T(t) = e^{\frac{-kn^2\pi^2}{L^2}t}$

iv) $u_n(x,t) = \begin{cases} d_n \cdot C_n = d_n \ (\text{constante}) \\ A_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{\frac{-kn^2\pi^2}{L^2}t} \end{cases}$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{\frac{-kn^2\pi^2 t}{L^2}}$$

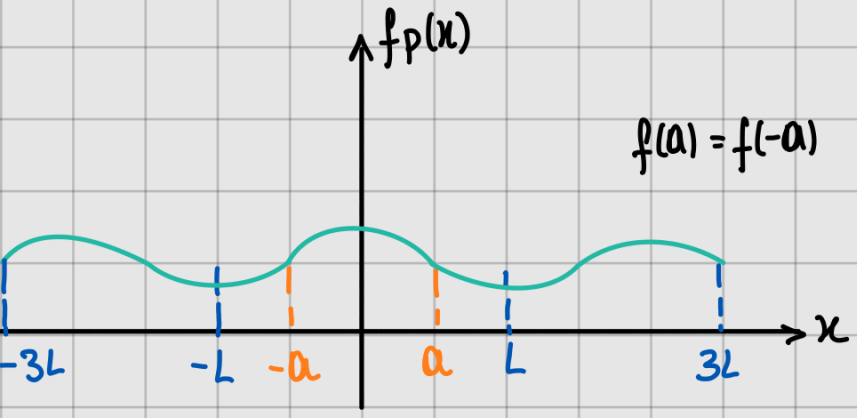
vi) $f(x,0) = f(x) \qquad A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$

par — função não periódica

⇓

EXTENSÃO PERIÓDICA

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f_p(x)$$



$f(a) = f(-a)$

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} g(x)\,dx$$

$$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(x)\cos(n\omega x)\,dx$$

$$A_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} fp(x)dx = \frac{1}{2L}\left(\int_{-L}^{0} fp(x)dx + \int_{0}^{L} fp(x)dx\right) = \frac{1}{2L}\left(-\int_{0}^{-L} fp(x)dx + \int_{0}^{L} fp(x)dx\right)$$

↳ mudança de variável

x vai de 0 até $-L$

$\alpha = -x \in [0, -L]$

$-\alpha = x$

$-d\alpha = dx \quad fp(-\alpha) = f_p(\alpha)$

$$A_0 = \frac{1}{2L}\cdot 2\int_{0}^{L} fp(x)dx = \boxed{\frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx}$$

$$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} fp(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

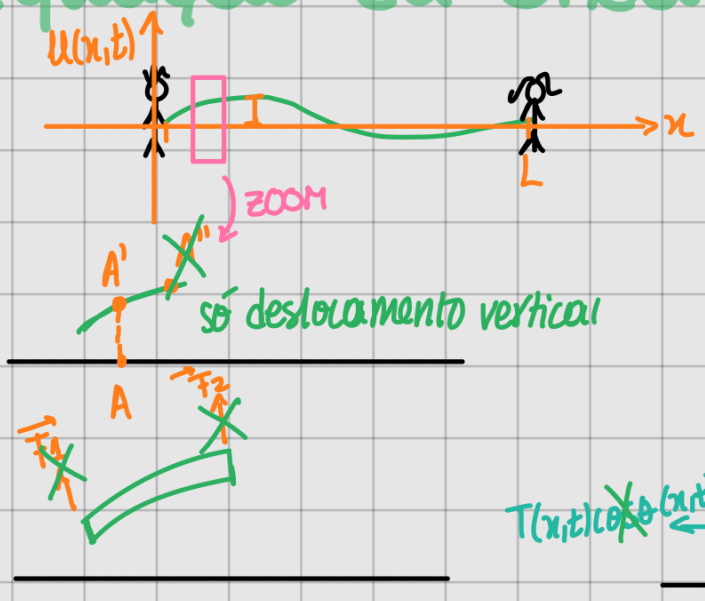
$$= \cdots = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$\begin{cases} u_t = k\,u_{xx} \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(L,t) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) e^{\frac{-k n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

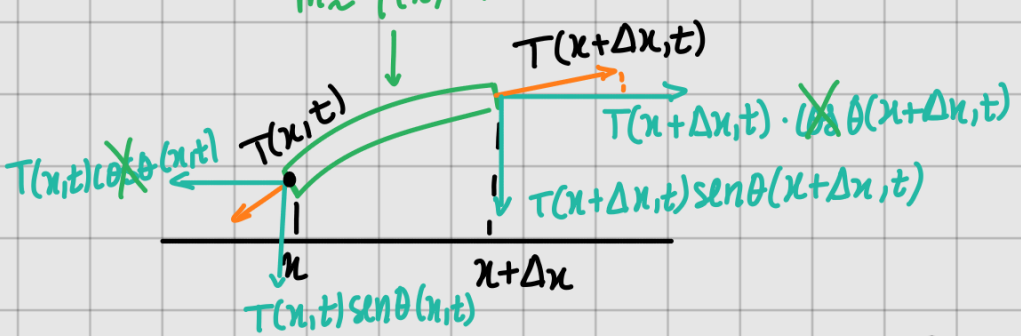
$$A_0 = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx \;,\; A_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Equação da Onda



Suposições

- Movimento só vertical
- Material perfeitamente flexível
- Pequenas vibrações



$F = m \cdot a$

$$T(x+\Delta x,t)\,\text{sen}\,\theta(x+\Delta x,t) - T(x,t)\,\text{sen}\,\theta(x,t) + \text{forças externas} = \rho(x)\Delta x \cdot u_{tt}(x,t)$$

(forças externas: no extremo)

$$\frac{T(x+\Delta x,t)\,\text{sen}\,\theta(x+\Delta x,t) - T(x,t)\,\text{sen}\,\theta(x,t)}{\Delta x} = \frac{\rho(x)\Delta x\, u_{tt}(x,t)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{T(x+\Delta x,t)\,\text{sen}\,\theta(x+\Delta x,t) - T(x,t)\,\text{sen}\,\theta(x,t)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \rho(x)\cdot u_{tt}(x,t)$$

$$\frac{\partial\,(T(x,t)\,\operatorname{sen}\theta(x,t))}{\partial x} = \rho(x)\,u_{tt}(x,t)$$

$u_x = \operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ Se $\theta \approx 0$, $\cos\theta \approx 1 \Rightarrow u_x \approx \operatorname{sen}\theta$ (para vibrações pequenas)

$$\frac{\partial(T(x,t)\,u_x(x,t))}{\partial x} = \rho(x)\,u_{tt}(x,t)$$ } Material homogeneo

$$\frac{\partial(T\,u_x(x,t))}{\partial x} = \rho\,u_{tt}(x,t)$$

$$T u_{xx}(x,t) = \rho\,u_{tt}(x,t) \qquad u_{tt}(x,t) = \frac{T}{\rho}\,u_{xx}(x,t)$$

velocidade

$$u_{tt}(x,t) = c^2\,u_{xx}(x,t)$$

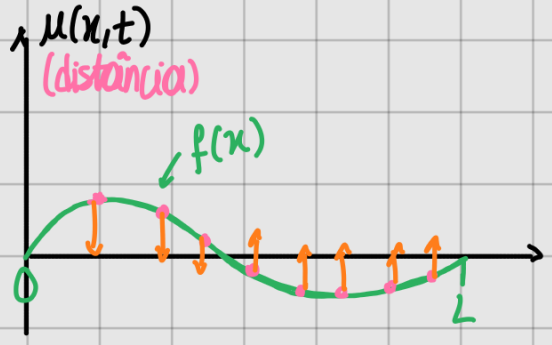
EDP da Onda

Equação da Onda - Resolver EDP

- Resolva a EDP da Onda (1 dimensão espacial) dada por

variável da dimensão espacial; variável do tempo

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2\,u_{xx}(x,t) & \text{(I)} \quad 0 \le x \le L,\ t \ge 0 \\ u(0,t) = 0 = u(L,t) & \text{(II)} \quad t \ge 0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{posição} \quad 0 \le x \le L \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{velocidade em cada ponto} \quad 0 \le x \le L \end{cases}$$



- Método da Separação das Variáveis

i) $u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \qquad u_{xx} = X''(x)T(t) \qquad u_{tt} = X(x)T''(t)$

A solução trivial serve para as condições (I) e (II) e para somente $f(x) = 0$, $g(x) = 0$

$u_{xx} = 0 \qquad u(x,t) = 0 \qquad u_{tt} = 0$

ii) $u_{tt} = c^2 u_{xx} \rightarrow \frac{X(x)T''(t)}{X(x)T(t)} = \frac{c^2 X''(x)T(t)}{X(x)T(t)}$

$\Leftrightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{c^2 X''(x)}{X(x)} \Leftrightarrow \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \sigma$ constante

• $\sigma = 0$: $\frac{X''(x)}{X(x)} = 0 \rightarrow X''(x) = 0 \quad X'(x) = C_1 \quad X(x) = C_1 x + C_2$

$u(0,t) = X(0)T(t) = 0$
$u(L,t) = X(L)T(t) = 0$

$X(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 = C_2 = 0 \rightarrow X(x) = C_1 x$

$X(L) = C_1 \cdot L = 0 \quad C_1 = 0 \rightarrow X(x) = 0$ → Solução trivial não funciona

• $\sigma > 0$: $\sigma = \lambda^2, \lambda > 0 \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda^2 \quad X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$

$r^2 - \lambda^2 = 0 \rightarrow r^2 = \lambda^2 \quad r = \lambda \vee r = -\lambda$

$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$

$X(0) = C_1 e^{\lambda \cdot 0} + C_2 e^{-\lambda \cdot 0} = C_1 + C_2 = 0 \quad C_2 = -C_1 \quad X(x) = C_1(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x})$

$X(L) = C_1(e^{\lambda L} - e^{-\lambda L}) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \rightsquigarrow$ Solução trivial não interessa

$C_1(e^{\lambda L} - e^{-\lambda L}) \cdot \frac{e^{\lambda L}}{e^{\lambda L}} = 0$

$C_1(e^{2\lambda L} - 1) = 0$ ($e^{2\lambda L} \neq 0$)

• $\sigma < 0$: $\sigma = -\lambda^2, \lambda > 0 \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \quad X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$

$r^2 + \lambda^2 = 0 \quad r^2 = -\lambda^2 \Rightarrow r = \lambda i \quad r = -\lambda i$

$X(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \operatorname{sen}(\lambda x)$

$X(0) = C_1 \cos(0) + C_2 \operatorname{sen}(0) = C_1 = 0 \quad X(x) = C_2 \operatorname{sen}(\lambda x)$

$X(L) = C_2 \operatorname{sen}(\lambda L) = 0 \quad \operatorname{sen}(\lambda L) = 0 \Rightarrow \lambda L = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L}$

↳ $C_2 = 0$ (não interessa) $\vee \operatorname{sen}(\lambda L) = 0$, $\lambda = \frac{n\pi}{L}$

$X(x) = C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\right), \sigma = -\lambda^2 \quad \sigma = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$

iii) $\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ $\quad T''(t) + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} T(t) = 0$

$$T''(t) + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 T(t) = 0$$

$r^2 + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 = 0 \iff r^2 = -\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2$ $\quad r = \frac{cn\pi}{L} i$ $\quad \vee \quad r = -\frac{cn\pi}{L} i$

$$T(t) = d_1 \cos\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) + d_2 \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{L} t\right)$$

iv) $u(x,t) = X(x)T(t) = C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \left[d_1 \cos\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) + d_2 \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{L} t\right)\right]$

$$u_n(x,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{L} t\right)\right]$$

solução da EDP para diferentes valores de a_n e b_n

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{L} t\right)\right]$$ Solução Geral

v) $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$ ⟶ Extensão periódica $f(-a) = -f(a)$

Série de Fourier Ímpar

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

vi) $u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[-\frac{cn\pi}{L} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) + \frac{cn\pi}{L} b_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L} t\right)\right] = g(x)$

$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \frac{cn\pi}{L} b_n = g(x)$ $\quad u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{1}{cn\pi} g(x)$

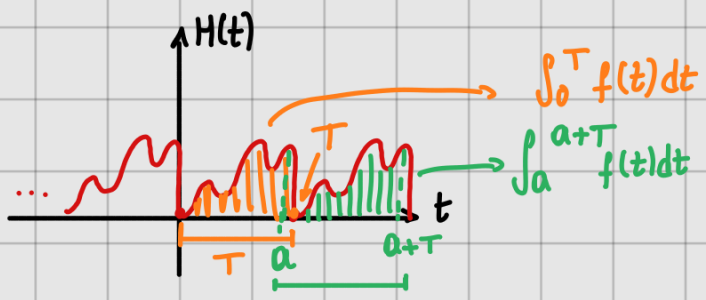
$$b_n = \frac{2}{L}\frac{L}{cn\pi}\int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

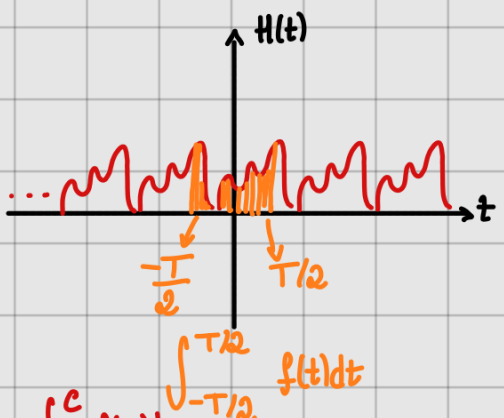
$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(0,t) = 0 = u(L,t) \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{L} t\right)\right]$$

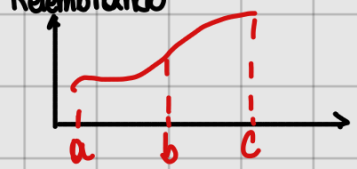
$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx \qquad b_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Integral num Período





Relembrando



$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

se $t \in [a,b]$, então $\tau = t+T \in [a+T, b+T]$

Exemplos

1) Mostre que se $f(t+T) = f(t)$, então $\int_{b-T/2}^{a+T/2} f(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$

(Período T)

$f(t+T) = f(t)$ $\quad \tau = t+T \quad d\tau = dt \quad , \quad t \in [\alpha, \beta)$

$\tau - T = t \quad \tau = t+T \in [\alpha+T, \beta+T]$ } Importante!!

$f(\tau - T + T) = f(\tau - T)$

$f(\tau) = f(\tau - T)$

mudança de variável proposta

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(\tau - T)dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(\tau)d\tau = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t)dt$$

Demonstração

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t)dt$$

Conclusão final

$$\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+T/2} f(t)dt = \int_{a-\frac{T}{2}}^{-T/2+T} f(t)dt + \int_{-T/2}^{a+T/2} f(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t)dt + \int_{a+\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$$

* Se adicionarmos o período o integral não muda de valores mas muda de limites

Resultados Relevantes : Integrais envolvendo funções periódicas

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t)dt$$

$$\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$$

$$\int_0^P f(t)dt = \int_T^{T+P} f(t)dt$$

$$\int_0^T f(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$$

Senos e Cossenos: Funções Ortogonais

$\{\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \dots, \phi_k(t)\}$, $a < t < b$

$\{\phi_k\}$ é ortogonal em (a,b) se dadas ϕ_m e $\phi_n \in \{\phi_k\}$

$$\int_a^b \phi_m(t)\,\phi_n(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ r_n & \text{se } m = n \end{cases}$$

Exemplo : $f(x) = x^2+1$ e $f(x) = x$ são ortogonais em $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} (x)(x^2+1)\,dx = \int_{-1}^{1} x^3 + x\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} + \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

Relembrar

- $w = \frac{2\pi}{T}$, T é o período da função
- $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$
- $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$
- $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$
- $2\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$
- $\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A\cos B + \operatorname{sen} B\cos A$
- $\operatorname{sen}(A-B) = \operatorname{sen} A\cos B - \operatorname{sen} B\cos A$
- $2\operatorname{sen} A\cos B = \operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)$
- $2\operatorname{sen} B\cos A = \operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B)$

FORMULAS RELEVANTES

Vamos considerar as funções seno e cosseno e $w = \frac{2\pi}{T}$ com $n, m \in \mathbb{Z}$

1) $\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} \cos(mwt)\,dt = 0$ para $m \neq 0$

↳ se $m = 0$ $\int_{-T/2}^{T/2} \cos(0)\,dt = T$

2) $\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}(mwt)\,dt = 0$ para todo o m

3) $\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} \cos(mwt)\cos(nwt)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ \frac{T}{2} & \text{para } m = n \neq 0 \end{cases}$

* Para o caso $m = n$ não esquecer que $\cos(A)\cos(A) = \cos^2(A) = \frac{1 + \cos(2A)}{2}$

4) $\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} \operatorname{sen}(m\omega t)\operatorname{sen}(n\omega t) = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{T}{2}, & m = n \neq 0 \end{cases}$

5) $\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} \operatorname{sen}(m\omega t)\cos(n\omega t)\,dt = 0$ para todo n e m

Exemplo de desenvolvimento de integral

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} \operatorname{sen}(\underbrace{m\omega t}_{A})\cos(\underbrace{n\omega t}_{B})\,dt$$

$$\operatorname{sen}(A)\cos B = \frac{\operatorname{sen}(A+B)+\operatorname{sen}(A-B)}{2}$$

$$\operatorname{sen}(\underbrace{m\omega t}_{A})\cos(\underbrace{n\omega t}_{B}) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(m\omega t + n\omega t) + \operatorname{sen}(m\omega t - n\omega t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\overbrace{(m+n)}^{C\ (n^{o}\ \text{inteiro})}\omega t\right) + \operatorname{sen}\left(\overbrace{(m-n)}^{D\ (n^{o}\ \text{inteiro})}\omega t\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(C\omega t) + \operatorname{sen}(D\omega t)\right] \; ; \; C \in D \in \mathbb{Z}$$

Reescrevendo a expressão inicial

$C = m+n \; ; \; D = m-n$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(C\omega t) + \operatorname{sen}(D\omega t)\right]dt = X$$

Se $m = n$: $C = 2m$ e $D = 0$ e $\operatorname{sen} 0 = 0$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2}\left[\operatorname{sen}(2m\omega t)\,dt\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(2m\omega t)}{2m\omega t}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{-1}{4m\omega}\left[\cos\left(2m\omega\tfrac{T}{2}\right) - \cos\left(-2m\omega\tfrac{T}{2}\right)\right]$$

↳ cosseno é uma função par
$\cos(t) = \cos(-t)$

$$= \frac{-1}{4m\omega}\left[\cos\left(\omega\tfrac{T}{2}\right) - \cos\left(-\omega\tfrac{T}{2}\right)\right] = 0 \; //$$

Se $n \neq m$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(C\omega t)}{C\omega}\right]_{T/2}^{-T/2} + \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(D\omega t)}{D\omega}\right]_{T/2}^{-T/2}$$

$$= \frac{-1}{2C\omega}\underbrace{\left[\cos\left(C\omega\frac{T}{2}\right) - \cos\left(-C\omega\frac{T}{2}\right)\right]}_{=0 \text{ cosseno é uma função par}} + \frac{1}{2D\omega}\underbrace{\left[\cos\left(D\omega\frac{T}{2}\right) - \cos\left(-D\omega\frac{T}{2}\right)\right]}_{=0\text{, cosseno é uma função par}} = 0$$

Serie de Fourier e Coeficientes de Fourier

▷ Seja $f(t)$ uma função periodica de periodo T: $f(t+T) = f(t)$. Então f possui uma representação na forma da seguinte serie trigonometrica:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos(\omega t) + b_1\,\text{sen}(\omega t) + a_2\cos(2\omega t) + b_2\,\text{sen}(2\omega t) + a_3\cos(3\omega t) + b_3\,\text{sen}(3\omega t) + \dots + a_k\cos(k\omega t) + b_k\,\text{sen}(k\omega t) + \dots$$

↳ coeficientes (nº reais constantes)

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\,\text{sen}(n\omega t)}$$

Integrais de funções periodicas

Ortogonalidade : seno e cosseno

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)\,dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2}\frac{1}{2}a_0\,dt + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\cancel{\int_{-T/2}^{T/2} a_n\cos(n\omega t)\,dt}^{=0} + \cancel{\int_{-T/2}^{T/2} b_n\,\text{sen}(n\omega t)\,dt}^{=0}}, \text{ com } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} a_1\cos(\omega t)\,dt + \int_{-T/2}^{T/2} b_1\,\text{sen}(\omega t) + \int_{-T/2}^{T/2} a_2\cos(\omega t)\,dt + \int_{-T/2}^{T/2} b_2\,\text{sen}(2\omega t)\,dt + \dots$$

coeficientes

Reescrevendo

$$a_1\int_{-T/2}^{T/2}\cos(\omega t)\,dt + b_1\int_{-T/2}^{T/2}\text{sen}(\omega t)\,dt + a_2\int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\omega t)\,dt + b_2\int_{-T/2}^{T/2}\text{sen}(2\omega t)\,dt$$

Usando a propriedade

$$\int_{\frac{T}{2}}^{-T/2} \cos(m\omega t)\,dt = 0 \quad \rightarrow \text{para } m \neq 0$$

$$\int_{\frac{T}{2}}^{-T/2} \operatorname{sen}(\omega t)\,dt = 0$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)dt = \frac{1}{2}a_0 \int_{-T/2}^{T/2} dt \Rightarrow 2\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)dt = a_0 \cdot T \Leftrightarrow a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)dt$$

1º coeficiente encontrado ✓

→ Calculo de a_n

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega t)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(m\omega t)\,dt = \frac{1}{2}a_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} \cos(m\omega t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt + b_n \int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt$$

(multiplicado por $\cos(m\omega t)$)

$\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} \cos(m\omega t)\,dt = 0$

$b_n \int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt = 0$

Quando $m = n$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt = a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ T/2, & \text{se } n = m \neq 0 \end{cases}$$

Unica integral que não é zero é quando $n = m$

$$\Leftrightarrow \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t) = a_n \cdot \frac{T}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

T = período

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

por exemplo: $a_3 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)\cos(3\omega t)\,dt$

▷ Calculo de bn

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega t) \quad \downarrow \times \operatorname{sen}(m\omega t)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)\operatorname{sen}(m\omega t)dt = \frac{1}{2}a_0 \underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}(m\omega t)dt}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega t)\operatorname{sen}(m\omega t)dt}_{=0} + b_n \underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}(n\omega t)\operatorname{sen}(m\omega t)dt}_{\begin{array}{l}0 \text{ para } m \neq n \\ \frac{T}{2} \text{ para } m = n\end{array}}$$

Quando $m = n$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)\operatorname{sen}(n\omega t)dt = b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} \operatorname{sen}^2(n\omega t)dt \Leftrightarrow \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)\operatorname{sen}(n\omega t)dt = b_n \cdot \frac{T}{2}$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)\operatorname{sen}(n\omega t)dt}$$

Série de Fourier de uma função $f(t)$ periodica de periodo T: $f(t+T) = f(t)$

→ série geometrica

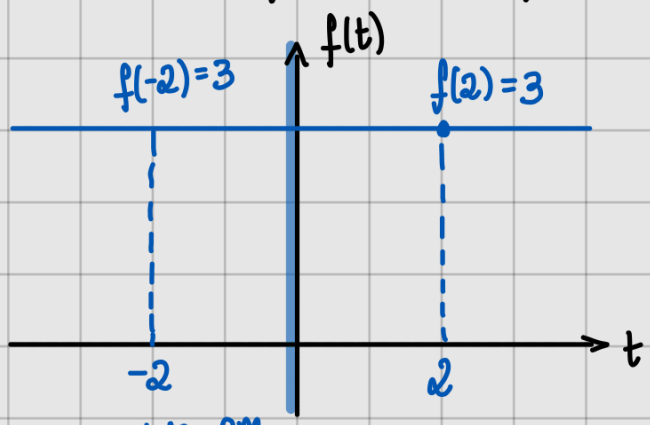
$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega t)\right]$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)dt \qquad a_1 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)\operatorname{sen}(n\omega t)dt$$

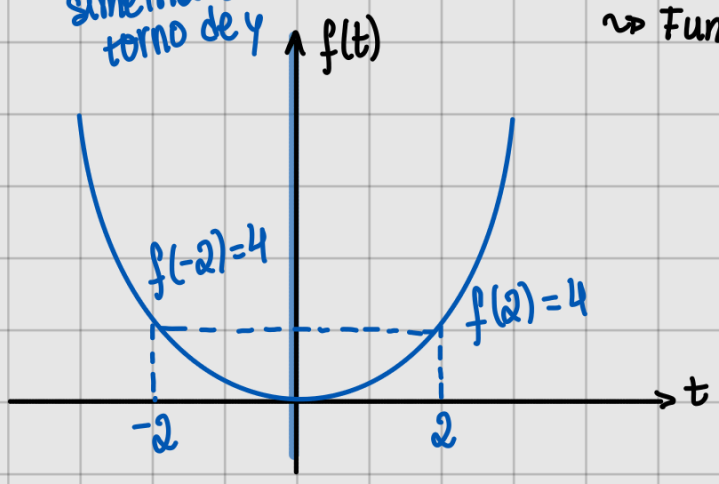
↳ Função par ↳ Função impar

Funções Pares e Impares e Coeficientes da Serie de Fourier

- Função Par: $f(t)$ é par se $f(-t) = f(t)$, $t \in Dom\, f$

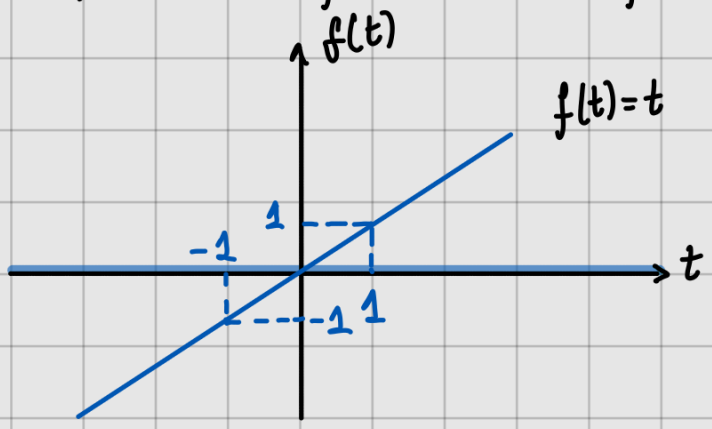


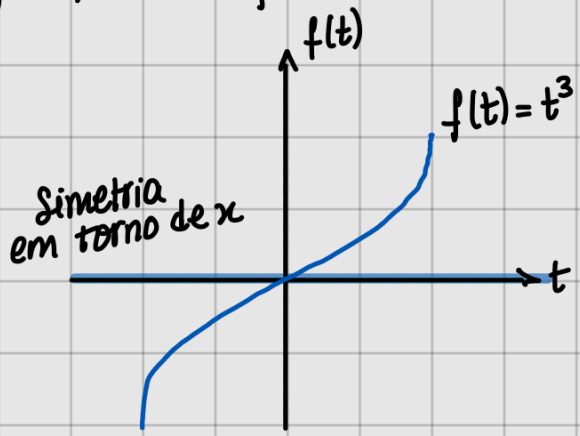
↝ Função constante
$f(t) = 3$



↝ Função quadratica
$f(t) = t^2$

- Função Impar: $f(t)$ é impar se $f(-t) = -f(t)$, $t \in Dom\, f$





- O produto entre duas funções pares ou duas funções impares é uma função par

$f(t)$, $f(-t) = f(t)$ par $h(t)$, $h(-t) = -h(t)$ impar

$g(t)$, $g(-t) = g(t)$ par $i(t)$, $i(-t) = -i(t)$ impar

$T_1(t) = f(t)g(t)$; $T_1(-t) = f(-t)g(-t) = f(t)g(t) = T_1(t)$

$T_2(t) = h(t)i(t)$; $T_2(-t) = h(-t)\,i(-t) = [-h(t)][-i(t)] = h(t)i(t) = T_2(t)$

- O produto de uma função par com uma função impar dá uma função impar

$T_3(t) = f(t)h(t)$; $T_3(-t) = f(-t)h(-t) = -f(t)h(t) = -T_3(t)$

- Qualquer função $f(t)$ pode ser expressa como a soma de uma função par com uma função impar

Exemplos

- $f(t) = t^2 + t + 1$

  $f(t) = \underbrace{t^2+1}_{\text{par}} + \underbrace{t}_{\text{impar}}$

- $f(t) = \underbrace{8\cos(3t)}_{\text{par}} - \underbrace{5\text{sen}(2t)}_{\text{impar}}$

Demonstração

$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f(-t) \quad \frac{1}{2}f(-t) + \frac{1}{2}f(t)$

$f(t) = \underbrace{\frac{1}{2}\left[f(t)+f(-t)\right]}_{f_{par}(t)} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[f(t)-f(-t)\right]}_{f_{impar}(t)}$

$f_p(t) = \frac{1}{2}\left[f(t)+f(-t)\right]$

$f_p(-t) = \frac{1}{2}\left[f(t)+f(-t)\right] = f_p(t)$

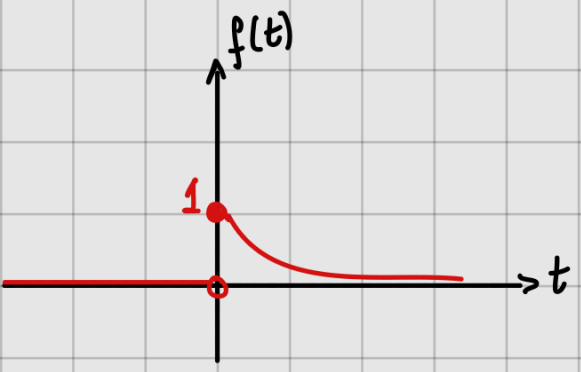
$f_i(t) = \frac{1}{2}\left[f(t)-f(-t)\right]$

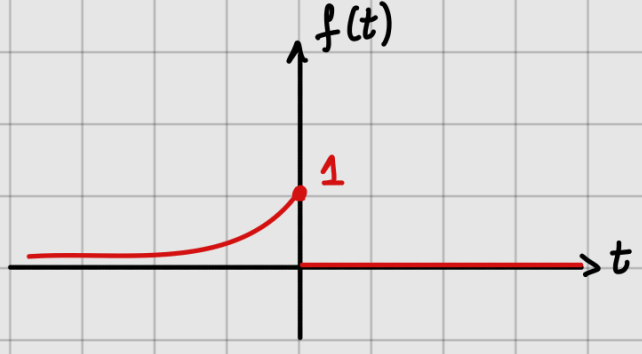
$f_i(-t) = \frac{1}{2}\left[f(-t)-f(t)\right] =$

$f_i(-t) = -\frac{1}{2}\left[f(t)-f(-t)\right] = -f_i(t)$

Exemplo: Seja $f(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ e^{-t}, & t>0 \end{cases}$ Escreva $f(t)$ como a soma de uma função par com uma função impar

$f(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ e^{-t}, & t>0 \end{cases}$ $\quad f(-t) = \begin{cases} 0, & -t<0 \\ e^{t}, & -t>0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow f(-t) = \begin{cases} e^{t}, & t<0 \\ 0, & t>0 \end{cases}$





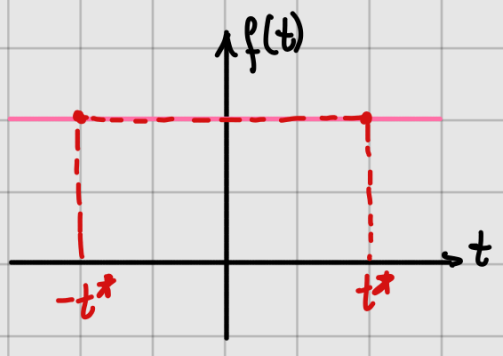
$$f_p(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) + f(-t)\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{cases} 0 & ,t<0 \\ e^{-t} & ,t>0 \end{cases} + \begin{cases} e^{t} & ,t<0 \\ 0 & ,t>0 \end{cases}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{cases} 0+e^{t} & ,\text{se } t<0 \\ e^{-t}+0 & ,\text{se } t>0 \end{cases}\right] = \begin{cases} \frac{e^{t}}{2} & ,\text{se } t<0 \\ \frac{e^{-t}}{2} & ,\text{se } t>0 \end{cases}$$

$$f_i(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) - f(-t)\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{cases} 0 & ,t<0 \\ e^{-t} & ,t>0 \end{cases} - \begin{cases} e^{t} & ,t<0 \\ 0 & ,t>0 \end{cases}\right] = \frac{1}{2}\begin{cases} -e^{t} & ,t<0 \\ e^{-t} & ,t>0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-e^{t}}{2} & ,t<0 \\ \frac{e^{-t}}{2} & ,t>0 \end{cases}$$

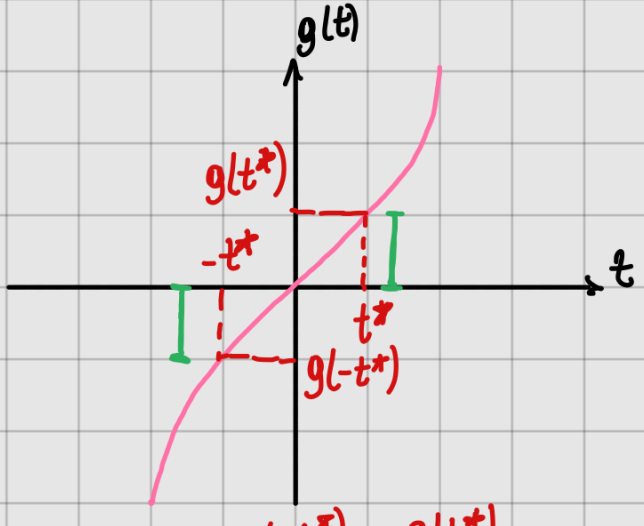
$$f(t) = f_p(t) + f_i(t) = \begin{cases} \frac{e^{t}}{2} & ,t<0 \\ \frac{e^{-t}}{2} & ,t>0 \end{cases} + \begin{cases} \frac{-e^{t}}{2} & ,t<0 \\ \frac{e^{-t}}{2} & ,t>0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & ,t>0 \\ e^{-t} & ,t<0 \end{cases}$$

Funções Pares e Ímpares e Coeficientes de Fourier (Continuação)



$f(-t^*) = f(t^*)$

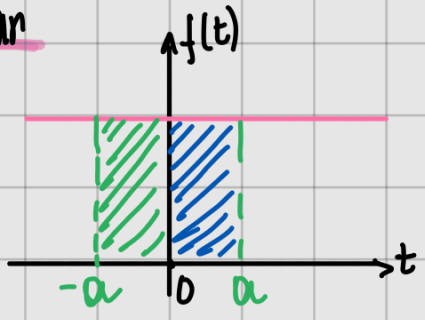
Função Par



$g(-t^*) = -g(t^*)$

Função Ímpar

Par



$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt$$

↳ $t \in (-a, 0)$

↕

$-t \in (-(-a), -0) \rightarrow -dt$

→ F. Par

$$= -\int_{a}^{0} f(-t) + \int_{0}^{a} f(t)dt = -\int_{a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt$$

$$= \int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = \boxed{2\int_{0}^{a} f(t)dt}$$

Relembrando

$$\int_{xa}^{xb} f(x)dx = -\int_{xb}^{xa} f(x)dx$$

Função Par

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt}$$

Impar

Função Impar

$$\boxed{\int_{-a}^{a} g(t)dt = \int_{-a}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{a} g(t)dt = 0}$$

$$\int_{-a}^{a} g(t)dt = \int_{-a}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{a} g(t)dt$$

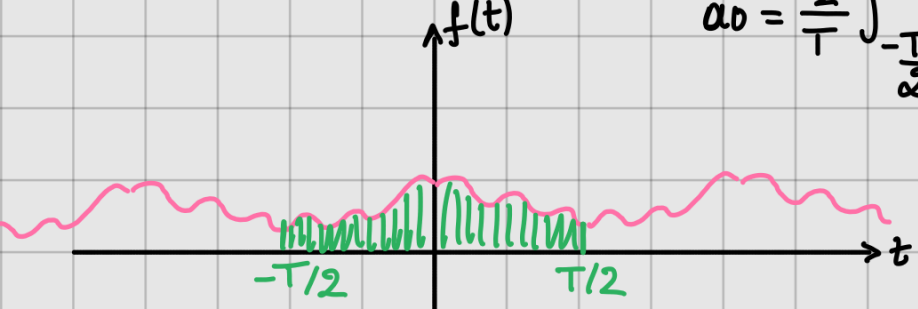
$$= -\int_{a}^{0} g(-t)dt + \int_{0}^{a} g(t)dt =$$

$$= \int_{a}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{a} g(t)dt =$$

$$= \boxed{-\int_{0}^{a} g(t)dt + \int_{0}^{a} g(t)dt = 0} \;//$$

- Caso: Função Par $\cdot \int_{-a}^{a} p(t)dt = 2\int_{0}^{a} p(t)dt \quad \cdot \int_{-a}^{a} i(t)dt = 0$

Serie de Fourier: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega t)$



$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)\operatorname{sen}(n\omega t)dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)\,dt = 2\cdot\frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt = \boxed{\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt}$$ Coeficiente a_0 quando $f(t)$ é par

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \boxed{\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt}$$ (par · par = par) Coeficiente a_n quando $f(t)$ é par

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega t)\,dt = 0$$ (par · impar = impar) Coeficiente b_n quando $f(t)$ é impar

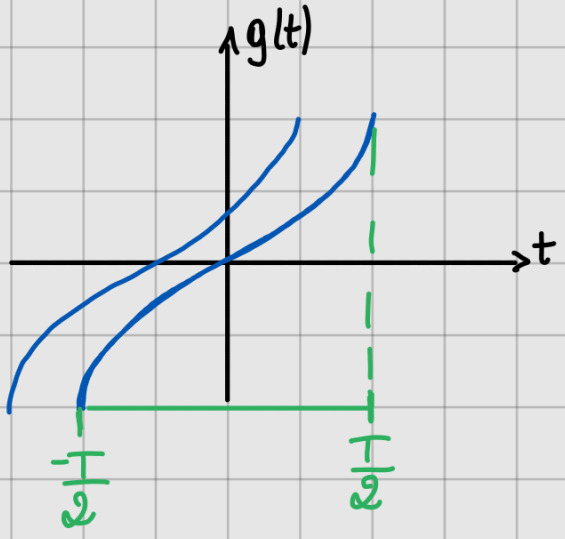
Se $f(t)$ é par $\quad f(t+T) = f(t) \Rightarrow f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t)$

$$\boxed{a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt}$$

$$\boxed{a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt}$$

Caso Função Impar

- $\int_{-a}^{a} p(t)\,dt = 2\int_0^a p(t)\,dt$
- $\int_{-a}^{a} i(t) = 0$



$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\,\mathrm{sen}(n\omega t)$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} g(t)\,dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} g(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} g(t)\,\mathrm{sen}(n\omega t)\,dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} g(t)\,dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} g(t)\cos(n\omega t)\,dt = 0$$ (impar · par = impar)

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} g(t)\,\mathrm{sen}(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\cdot 2\int_0^{T/2} g(t)\,\mathrm{sen}(n\omega t)\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} g(t)\,\mathrm{sen}(n\omega t)\,dt$$ (impar · impar = par)

Resumo

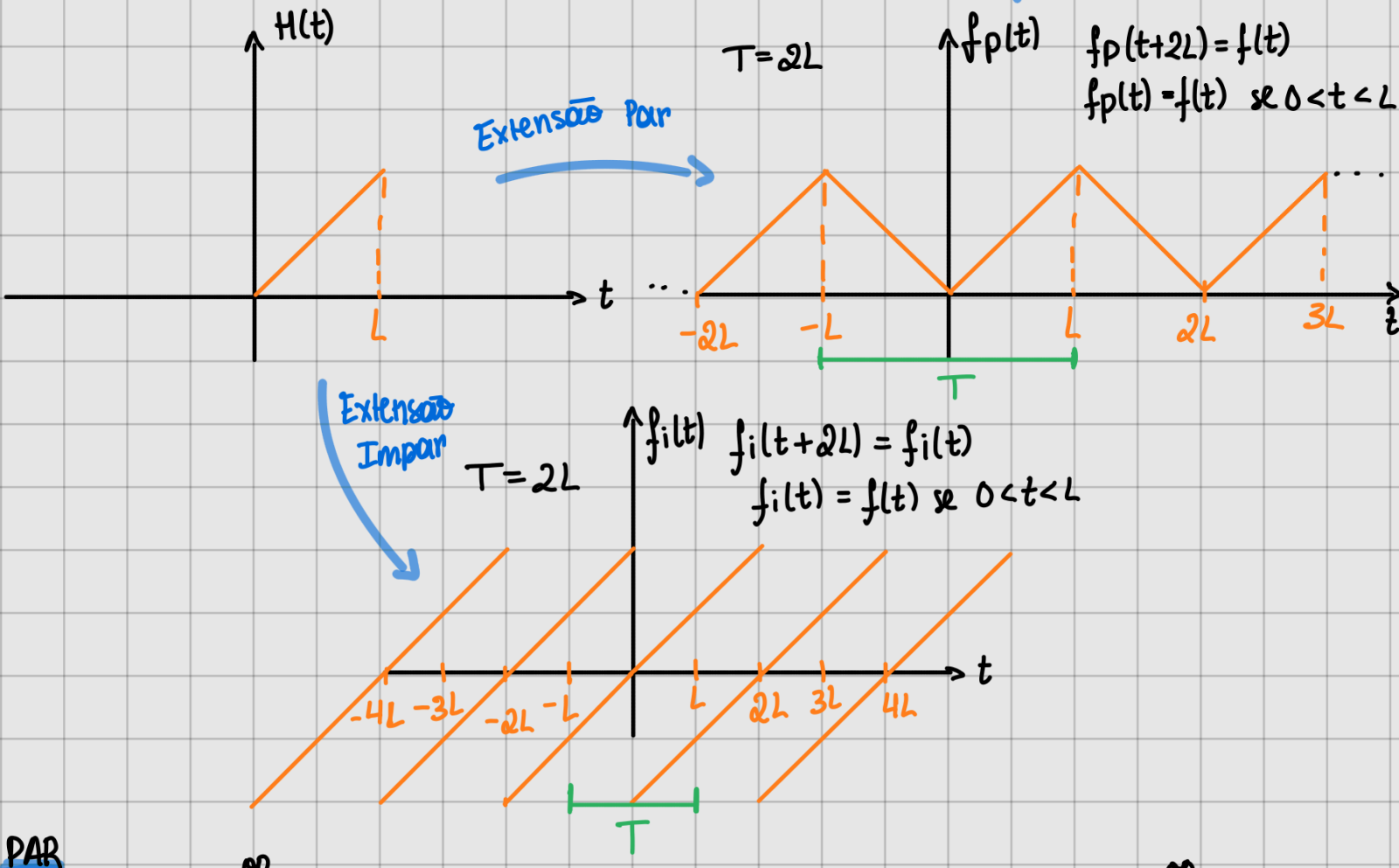
Função Par

- $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$
- $a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt$
- $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$

Função Impar

- $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\omega t)$
- $b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} g(t)\operatorname{sen}(n\omega t)\,dt$

Extensão Periodica Par e Impar



PAR

$$fp(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) \quad \text{com} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2L} \qquad fp(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} fp(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \quad \text{com} \quad \frac{T}{2} = \frac{2L}{2} = L \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} fp(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt$$

Função par: $f(t) = f(-t)$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} fp(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt$$

Como no intervalo $f(t) = fp(t)$

$$fp(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt$$

IMPAR

$$fi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\omega t) \quad \text{com} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad fi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} fi(t)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{fi(t)}_{\text{F.IMPAR}} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)}_{\text{F.IMPAR}} dt \rightarrow \text{F. Par}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L fi(t)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt$$

No intervalo de $[0, L]$ $f(t) = fi(t)$

logo $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt$

$$fi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt$$

Exemplo: Seja $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \pi/2 < t < \pi \end{cases}$

Desenvolva $f(t)$ numa serie de Fourier de senos e esboce o gráfico da extensão periodica associada

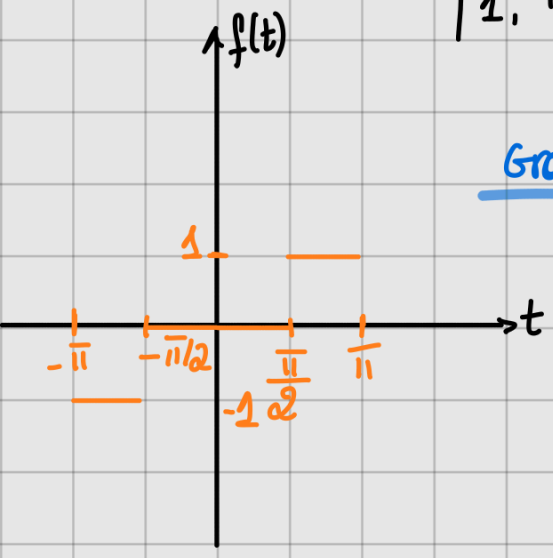
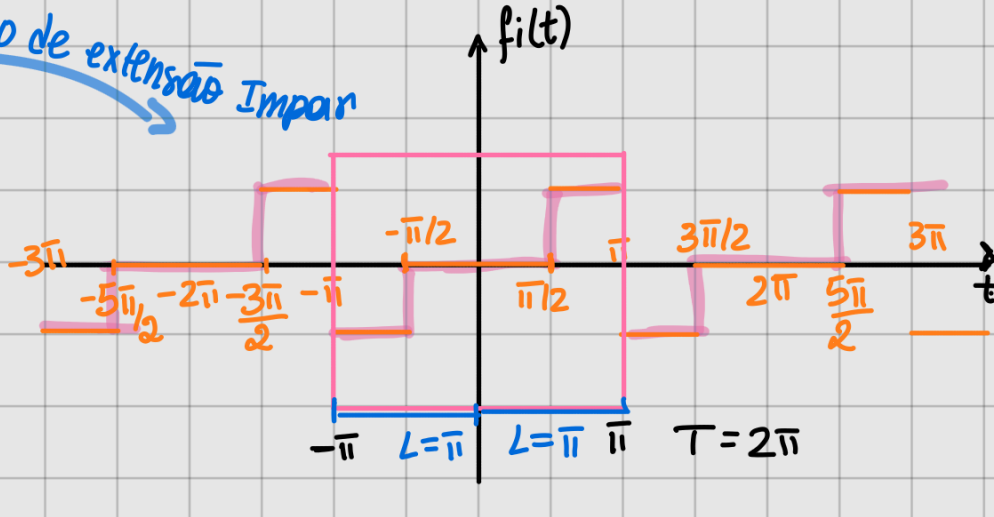


Gráfico de extensão Impar



$$f_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\omega t) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \qquad f_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nt)$$

$$T = 2\pi = 2L \qquad L = \pi$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\operatorname{sen}(n\omega t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\operatorname{sen}(nt)dt$$

$$\int_0^{\pi} = \int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi}$$

$\int_0^{\pi/2} = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(t)\operatorname{sen}(nt)dt$$

$f(t) = 1$

$$b_n = \frac{-2}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{1}{2}n\pi\right)\right)$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & n = \text{impar} \\ \frac{-4}{n\pi}, & n = 2, 6, 10, \ldots \\ 0, & n = 4, 8, 12, \ldots \end{cases}$$